S. Teufel, S. Haag, J. von Keler
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2013
19.04.2013

Mathematische Physik: Klassische Mechanik

Übungsblatt 1

Aufgabe 1: Äquivalente Atlanten

(a) Zeigen Sie: Zwei Mannigfaltigkeitstrukturen über derselben Menge M sind genau dann gleich (d.h. sie werden durch äquivalente Atlanten $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ definiert), wenn die Identität,

$$\mathrm{Id} : (M, \mathcal{A}_1) \to (M, \mathcal{A}_2), \quad m \mapsto m\,,$$

ein Diffeomorphismus ist.

(b) Finden Sie zwei nicht-äquivalente Atlanten $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ für $\mathbb{R}$! Sind $M = (\mathbb{R}, \mathcal{A}_1)$ und $N = (\mathbb{R}, \mathcal{A}_2)$ zueinander diffeomorph, d.h., gibt es einen Diffeomorphismus $\phi : M \to N$?

Aufgabe 2: Die Sphäre

Finden Sie einen Atlas für die Einheitssphäre im $\mathbb{R}^3$, dh. für die Untermannigfaltigkeit

$$S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$$

des $\mathbb{R}^3$.

Tipp: Am einfachsten geht das mit Hilfe der stereographischen Projektion.

Aufgabe 3: Phasenraumportrait des Doppelmuldenpotentials

Sei $a \in \mathbb{R}$ und $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wir betrachten die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\ddot{x} \;=\; -x^3 + a\,x\,.$$

Schreiben Sie die Gleichung als System erster Ordnung, bestimmen Sie die Fixpunkte (d.h. die Nullstellen des entsprechenden Vekorfeldes) der Gleichung und skizzieren Sie das Phasenraumporträt in Abhängigkeit von a!

Hinweis: Das System erster Ordnung auf dem $\mathbb{R}^2$ lautet

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x^3 + a\,x \end{pmatrix}\,.$$

Abgabe: Am Mittwoch, 24.04.2013, zu Beginn der Vorlesung.