S. Teufel, S. Haag, J. von Keler
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2013
26.06.2013

Mathematische Physik: Klassische Mechanik

Übungsblatt 10

Aufgabe 36: Die Sphäre als symplektische Mannigfaltigkeit

Machen Sie sich klar, dass $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, |x| = 1\}$ mit der vom $\mathbb{R}^3$ induzierten Volumenform ω eine symplektische Mannigfaltigkeit ist. Sei $B \in \mathbb{R}^3$ und die Hamiltonfunktion $H : S^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$H(n) = B \cdot n$$

gegeben, wobei $\cdot$ das euklidische Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$ bezeichne. Berechnen Sie das zugehörige Hamiltonsche Vektorfeld in geeigneten Koordinaten. Zeigen Sie dann, dass die sich ergebenden Hamiltonschen Gleichungen äquivalent sind zu

$$\dot{n} = B \times n.$$

Wie sehen die Lösungen aus? *Tipp: Wählen Sie die Kugelkoordinaten so, dass $H = |B| \cos\theta$!*

Aufgabe 37: Die Liouvillegleichung

Sei Φ_t^H der von X_H erzeugte Hamiltonsche Fluss auf der symplektischen Mannigfaltigkeit (M, ω) und $g, H \in C^\infty(M)$. Zeigen Sie, dass $g(t) := g \circ \Phi_t^H$ die Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g(t) = \{g(t), H\}$$

löst. Zeigen Sie weiterhin, dass $g(t) = g(0)$ falls $\{g, H\} = 0$.

Aufgabe 38: Exaktheit symplektischer Formen

Sei (M, ω) eine unberandete, kompakte, symplektische Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass M nicht exakt symplektisch ist.

Tipp: Betrachten Sie zunächst den Fall $\dim M = 2$ und verwenden Sie den Satz von Stokes. Verallgemeinern Sie dann die Beweisidee auf $\dim M = 2n$. Zeigen Sie dazu, dass aus der Exaktheit von ω die Exaktheit von Ω folgt.

Aufgabe 39: Lie-Klammer und Vertauschbarkeit von Flüssen

Seien $X, Y \in \mathcal{T}_0^1(M)$ vollständige Vektorfelder mit $[X, Y] = 0$. Zeigen Sie, dass dann auch die zugehörigen Flüsse vertauschen, also, dass

$$\Phi_t^X \circ \Phi_s^Y = \Phi_s^Y \circ \Phi_t^X \qquad \text{für alle } t, s \in \mathbb{R}\,.$$

Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

(a) Zeigen Sie, dass $\Phi_s^{Y*} X = X$ für alle $s \in \mathbb{R}$ und analog, dass $\Phi_t^{X*} Y = Y$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(b) Zeigen Sie, dass für jedes $g \in C_0^\infty(M)$ gilt

$$g \circ \Phi_{-t}^X \circ \Phi_{-s}^Y \circ \Phi_t^X \circ \Phi_s^Y = g$$

indem Sie beide Seiten nach t und s differenzieren und verwenden, dass die Gleichung für $t = s = 0$ gilt.

(c) Folgern Sie aus (b) die Behauptung.

Abgabe: Mittwoch, 03.07.2013, bis 17.00 Uhr im Postfach von Herrn Teufel.