S. Teufel, S. Haag, J. von Keler
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2013
03.07.2013

Mathematische Physik: Klassische Mechanik

Übungsblatt 11

Aufgabe 40: Poissonklammer und kanonische Transformationen

Seien M_1 und M_2 symplektische Mannigfaltigkeiten und $\psi : M_1 \to M_2$ eine kanonische Transformation. Zeigen Sie, dass

$$\psi^*(\{f, g\}_{M_2}) \;=\; \{\psi^* f, \psi^* g\}_{M_1}\,.$$

Aufgabe 41: Lagrangesche Untermannigfaltigkeiten und kanonische Transformationen

Sei $\psi : (M_1, \omega_1) \to (M_2, \omega_2)$ ein Diffeomorphismus von symplektischen Mannigfaltigkeiten. Zeigen Sie, dass ψ genau dann symplektisch ist, wenn der Graph von ψ,

$$\Gamma_\psi \;=\; \{\, \big(x, \psi(x)\big) \,|\, x \in M_1 \,\} \;\subset\; M_1 \times M_2,$$

eine Lagrangesche Untermannigfaltigkeit bzgl. der symplektischen Form $\Omega = \omega_1 \ominus \omega_2$ ist.

Aufgabe 42: Erzeugende Funktionen

Sei $M = \mathbb{R}^{2n}$ versehen mit der kanonischen symplektischen Form ω_0 und sei $H(q, p) = \frac{1}{2}|p|^2$. Bestimmen Sie die erzeugende Funktion S_t der kanonischen Transformation

$$\Phi_t^{X_H} : (q, p) \mapsto (q + pt, p)$$

gegeben durch den freien Fluss für $t \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie dabei alle vier in der Vorlesung besprochenen Möglichkeiten S_t darzustellen. Welche Darstellungen kommen für welche Zeiten infrage?

Aufgabe 43: Das Noether-Theorem in der Hamiltonschen Mechanik

Sei (P, ω) eine einfach zusammenhängende symplektische Mannigfaltigkeit, $H \in C^\infty(P)$ und Φ_t eine kontinuierliche Symmetrie des Systems, d.h. $t \mapsto \Phi_t$ ist ein Fluss auf M so, dass jedes Φ_t eine kanonische Transformation ist, welche H invariant läßt, also $\Phi_t^* H = H$ für alle $t \in \mathbb{R}$ erfüllt. Zeigen Sie, dass es eine zu Φ_t gehörige Erhaltungsgröße $F \in C^\infty(P)$ gibt, mit $\Phi_t = \Phi_t^{X_F}$ und $\{F, H\} = 0$.

Aufgabe 44: Das Noether-Theorem: Symmetrien des Konfigurationsraums ∗

Liftet man eine Symmetrietransformation des Konfigurationsraums M auf den Phasenraum T^*M, so wirkt sie immer als kanonische Transformation. Zeigen Sie dazu: Sei $P = T^*M$ versehen mit der kanonischen symplektischen Form und ϕ_t ein Fluss auf M (wir stellen uns hier die Gruppenwirkung einer Symmetriegruppe des Konfigurationsraumes M vor). Zeigen Sie, dass $\Phi_t := T^*\phi_t$ dann ein Fluss auf P ist und Φ_t für alle $t \in \mathbb{R}$ eine kanonische Transformation ist. (Für die Schreibweise $T^*\phi_t$ siehe Definition 1.82 im Skript).

Abgabe: Mittwoch, 10.07.2013, bis 17.00 Uhr im Postfach von Herrn Teufel.