S. Teufel, S. Haag, J. von Keler
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2013
17.07.2013

Mathematische Physik: Klassische Mechanik

Übungsblatt 13

Aufgabe 50: Rational abhängige Frequenzen

Es definiere $\omega \in \mathbb{R}^n$ eine bedingt periodische Bewegung

$$\Phi_t^\omega : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n,\, \varphi \mapsto \varphi + t\omega \mod 2\pi\mathbb{Z}^n .$$

Zeigen Sie: Wenn es ein $k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ mit $k \cdot \omega = 0$ gibt, dann existiert ein glattes $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$ so, dass das Zeitmittel

$$\langle f \rangle_\varphi := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \Phi_t^{\omega\,*} f \,\mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\varphi + \omega t)\,\mathrm{d}t$$

nicht konstant ist, also von φ abhängt.

Aufgabe 51: Rational unabhängige Frequenzen

Sei Φ_t^ω wieder eine bedingt periodische Bewegung auf $\mathbb{T}^n$, diesmal aber mit rational unabhängigen Frequenzen, also $k \cdot \omega = 0$ für $k \in \mathbb{Z}^n$ impliziert $k = 0$. Zeigen Sie, dass jeder Orbit $O_\varphi := \{\Phi_t^\omega(\varphi) \,|\, t \in \mathbb{R}\}$ dicht in $\mathbb{T}^n$ liegt.

Aufgabe 52: Der Virialsatz

Sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit und $H \in C^\infty(M)$ eine Hamiltonfunktion, die einen vollständigen Fluss $\Phi_t^{X_H}$ auf M erzeugt. Sei weiterhin $f \in C^\infty(M)$.
Zeigen Sie, dass das Zeitmittel

$$\langle\{f, H\}\rangle := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \{f, H\} \circ \Phi_t^{X_H} \,\mathrm{d}t$$

auf der Energieschale $M_E := \{x \in M \,|\, H(x) = E\}$ verschwindet, falls $\sup_{x\in M_E} |f(x)| < \infty$.