S. Teufel, S. Haag, J. von Keler
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2013
24.04.2013

Mathematische Physik: Klassische Mechanik

Übungsblatt 2

Aufgabe 4: Tangentialraum und Tangentialabbildung

(a) Zeigen Sie, dass der in der Vorlesung eingeführte Tangentialraum T_xM an eine Mannigfaltigkeit M im Punkt x ein n-dimensionaler reeller Vektorraum ist.

Anleitung: Zeigen Sie zunächst, dass für jede Karte (V, φ) *mit* $x \in V$ *die Abbildung*

$$T\varphi : T_xM \to \mathbb{R}^n\,, \qquad [c]_x \mapsto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varphi \circ c)(t)\Big|_{t=0}$$

bijektiv ist. Zeigen Sie dann, dass die durch $T\varphi$ *auf* T_xM *induzierte Vektorraumstruktur unabhängig von* φ *ist.*

(b) Zeigen Sie, dass die in der Vorlesung eingeführte Tangentialabbildung wohldefiniert ist.

Aufgabe 5: Tangentialbündel

Sei M eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit und TM das zugehörige Tangentenbündel.

(a) Zeigen Sie, dass M eine Untermannigfaltigkeit von TM ist.

(b) Zeigen Sie: TM ist genau dann trivialisierbar, wenn es n punktweise linear unabhängige Vektorfelder auf M gibt.

Aufgabe 6: Die orthogonalen Matrizen als Mannigfaltigkeit

Zeigen Sie, dass die orthogonalen Matrizen $\mathbb{O}(n) := \{Q \in \mathrm{GL}(n) \,|\, Q^TQ = \mathrm{Id}\}$ eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $\frac{n(n-1)}{2}$ von $\mathrm{GL}(n)$ bilden. Weiterhin gilt

$$T_Q\mathbb{O}(n) = \{B \,|\, (Q^{-1}B)^T = -Q^{-1}B\}\,,$$

also insbesondere

$$T_{\mathrm{Id}}\mathbb{O}(n) \;=\; \{B \,|\, B^T = -B\} \;=:\; \mathrm{Schief}(n).$$

Tipp: Finden Sie eine Submersion $F : \mathrm{GL}(n) \to \mathrm{Sym}(n)$ *in die symmetrischen Matrizen Sym*(n) *mit* $F^{-1}(0) = \mathbb{O}(n)$*. Verwenden Sie dann Definition 1.8 und Bemerkung 1.24 aus der Vorlesung.*

Aufgabe 7: Lokaler Umkehrsatz *

Seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten der Dimension n. Für ein $p \in M$ sei $f : M \to N$ eine glatte Abbildung, so dass $Tf|_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ ein Isomorphismus ist. Zeige unter Verwendung des Umkehrsatzes im $\mathbb{R}^n$, dass es eine offene Umgebung $U \subset M$ von p gibt, so dass $V := f(U)$ offen und $f : U \to V$ ein Diffeomorphismus ist.

Abgabe: Freitag, 03.05.2013, zu Beginn der Vorlesung. Mit $*$ gekennzeichnete Aufgaben müssen nicht abgegeben werden.