S. Teufel, S. Haag, J. von Keler
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2013
03.05.2013

Mathematische Physik: Klassische Mechanik

Übungsblatt 3

Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit.

Aufgabe 8: Lie-Ableitung

Zeigen Sie folgende Eigenschaften der Lie-Ableitung:

(i) $L_X(f+g) = L_X f \, + \, L_X g$

(ii) $L_X(fg) = (L_X f)g \, + \, f(L_X g)$

(iii) $L_{\alpha X + \beta Y}(f) = \alpha \, L_X f \, + \, \beta \, L_Y f$

für $f, g, \alpha, \beta \in C^\infty(M)$ und $X, Y \in \mathcal{T}^1_0(M)$.

Aufgabe 9: Derivationen als Vektorfelder *

Sei $L : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ mit

(i) $L\,(\alpha f + g) = \alpha L f \, + \, L g$

(ii) $L\,(fg) = (Lf)g \, + \, f(Lg)$

für alle $f, g \in C^\infty(M)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $L = L_X$ gilt für ein $X \in \mathcal{T}^1_0(M)$.

Tipp: Zeigen Sie zunächst, dass $L(\text{const.}) = 0$ *ist. Dann verwenden Sie lokale Koordinaten, führen eine Taylorentwicklung durch und argumentieren, wie* L *auf die einzelnen Terme wirkt.*

Aufgabe 10: Der Kommutator von Vektorfeldern

Seien $X, Y \in \mathcal{T}^1_0(M)$. Zeigen Sie, dass es $Z \in \mathcal{T}^1_0(M)$ gibt, so dass

$$L_X \circ L_Y \, - \, L_Y \circ L_X \; = \; L_Z .$$

Tipp: Verwenden Sie das Ergebnis von Aufgabe 9!

Abgabe: Mittwoch, 08.05.2013, bis 17.00 Uhr im Postfach von Herrn Teufel.