S. Teufel, S. Haag, J. von Keler
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2013
08.05.2013

Mathematische Physik: Klassische Mechanik

Übungsblatt 4

Aufgabe 11: Flüsse

Sei $M := \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x| < 1\}$. Geben Sie jeweils ein nichttriviales Vektorfeld $Z \in \mathcal{T}_0^1(M)$ und den zugehörigen Fluss $\Phi^Z : D \to M$ mit dem Definitionsbereich D an, so dass gilt:

(i) Z ist vollständig,

(ii) Z ist nicht vollständig.

Aufgabe 12: Fixpunkte für Gradientenfelder und für Hamiltonsche Vektorfelder

Sei $M = \mathbb{R}^2$ mit Koordinaten $(q,p) \in \mathbb{R}^2$ und $H \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Diskutieren Sie die Möglichkeiten für das lokale Verhalten in Fixpunkten für die folgenden Vektorfelder durch Betrachtung der linearen Approximation im Fixpunkt. Skizzieren Sie jeweils den lokalen Fluss und das Vektorfeld.

(i) Gradientenfeld:

$$X_G(q,p) \;:=\; \begin{pmatrix} \partial_q H(q,p) \\ \partial_p H(q,p) \end{pmatrix}$$

(ii) Hamiltonsches Vektorfeld:

$$X_H(q,p) \;:=\; \begin{pmatrix} \partial_p H(q,p) \\ -\partial_q H(q,p) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 13: Transportgleichung

Sei X ein vollständiges Vektorfeld auf einer Mannigfaltigkeit M und Φ_t^X der zugehörige Fluss. Sei weiter $\tau_t^X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ definiert durch

$$\tau_t^X(f) \;:=\; f \circ \Phi_t^X.$$

Zeigen Sie, dass punktweise auf der Mannigfaltigkeit gilt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, \tau_t^X(f)|_{t=0} \;=\; L_X f.$$

Aufgabe 14: Basiswechsel

Sei T_0^1 ein n-dimensionaler Vektorraum und T_1^0 sein Dual. Sei $(e_j)_{j=1,\ldots,n}$ eine Basis von T_0^1 und $(e^j)_{j=1,\ldots,n}$ die duale Basis von T_1^0 definiert durch $e^j(e_i) := \delta_{ij}$. Sei $A : T_0^1 \to T_0^1$ ein Basiwechsel mit Matrix a_j^i bzgl. der Basis $(e_j)_j$ und $\hat{e}_j := Ae_j$ die neuen Basisvektoren, also

$$\hat{e}_j \;=\; \sum_i a_j^i\, e_i.$$

Wie transformiert sich dann die duale Basis? Genauer: Sei $(\hat{e}^j)_j$ die duale Basis zu $(\hat{e}_j)_j$. Bestimmen Sie die Matrix b_k^j, so dass

$$\hat{e}^j \;=\; \sum_k b_k^j\, e^k.$$

Wie transformieren sich dann die Komponenten eines Tensors $t \in T^r_s$ bei Basiswechseln? Folgern Sie aus dem Ergebnis, dass die Spur von $t \in T^1_1$ definiert durch

$$\mathrm{tr}(t) \;=\; \sum_j t(e^j, e_j)$$

unabhängig von der Wahl der Basis ist.

Abgabe: Mittwoch, 15.05.2013, bis 17.00 Uhr im Postfach von Herrn Teufel.