S. Teufel, S. Haag, J. von Keler
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2013
15.05.2013

Mathematische Physik: Klassische Mechanik

Übungsblatt 5

Aufgabe 15: Linearisierung von Vektorfeldern an Fixpunkten

Sei $X \in \mathcal{T}^1_0(M)$ ein glattes Vektorfeld und $x_0 \in M$ eine Nullstelle von X, d.h. $X(x_0) = (x_0, 0)$. In einer Karte φ mit $\varphi(x_0) = 0$ sei

$$X_\varphi(q) = DX_\varphi(0)\, q + \mathcal{O}(\|q\|^2)$$

die Taylorentwicklung von $X_\varphi := I \circ \varphi_* X$ bei 0. Hier bezeichnet Df wie üblich das Differential einer Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, also die Matrix $Df(q)_{ij} = \partial_{q_j} f_i(q)$. Sei ψ eine weitere Karte mit $\psi(x_0) = 0$ und $\Phi = \psi \circ \varphi^{-1}$ der Kartenwechsel.

Zeigen Sie, dass

$$DX_\psi(0) = D\Phi(0)\, DX_\varphi(0)\, D\Phi(0)^{-1}$$

gilt und folgern Sie, dass die Eigenwerte der Linearisierung $DX_\varphi(0)$ unabhängig von der Wahl der Karte sind.

Aufgabe 16: Die kanonische Volumenform

Sei $g \in T^0_2$ nicht-entartet und $(e^j)_{j=1,\dots,n}$ eine Basis von T^0_1 und $g = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}\, e^i \otimes e^j$. Zeigen Sie, dass die kanonische Volumenform $\varepsilon := \sqrt{|\det g_{ij}|}\, e^1 \wedge e^2 \wedge \ldots \wedge e^n$ bis auf das Vorzeichen unabhängig von der Wahl der Basis ist.

Aufgabe 17: Isometrien des Minkowskiraums 1

Sei $T^1_0 = \mathbb{R}^4$ und $\eta \in T^0_2$ die Minkowski-Metrik darauf, d.h. $\eta_{ij} = \sigma_i \delta_{ij}$ und $\sigma_1 = 1$, $\sigma_{i \neq 1} = -1$.

(a) Sei $\Lambda \in T^1_1$. Machen Sie sich klar, dass Λ eine lineare Abbildung $\Lambda : T^1_0 \to T^1_0$ definiert. Zeigen Sie, dass Λ genau dann eine Isometrie ist, also $\eta(\Lambda v, \Lambda v) = \eta(v, v)$ für alle $v \in T^1_0$, wenn

$$\Lambda^i_k \eta_{ij} \Lambda^j_\ell = \eta_{k\ell} \qquad \text{also} \qquad \Lambda^T\, \eta\, \Lambda \;=\; \eta.$$

Machen Sie sich klar, dass in dieser Notation die darstellende Matrix $\Lambda_{ij} = \Lambda^i_j$ (also Zeilenindex oben und Spaltenindex unten) geschrieben wird.

(b) Zeigen Sie, dass sowohl eine orthogonale Transformation in der zweiten bis vierten Koordinate, d.h.

$$R \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$$

für ein $r \in \mathbb{O}(3)$, als auch der s-Boost in x-Richtung, d.h.

$$B^s_x \;=\; \begin{pmatrix} \cosh s & \sinh s & 0 & 0 \\ \sinh s & \cosh s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Isometrien des Minkowskiraums sind. Folgern Sie, dass die speziellen Lorentztransformationen gegeben durch

$$\Lambda \;=\; R_1\, B^s_x\, R_2$$

ebenfalls Isometrien sind.

Aufgabe 18: Isometrien des Minkowskiraums 2 *

Sei wieder $T^1_0 = \mathbb{R}^4$ und η die Minkowski-Metrik darauf und $\Lambda \in T^1_1$ ein isometrischer Isomorphismus. Es sei Λ zusätzlich zukunftserhaltend, d.h.

$$\eta(e_1, \Lambda e_1) \; > \; 0,$$

wobei $e_1 = (1, 0, 0, 0)$ ist. Zeigen Sie, dass sich Λ als spezielle Lorentztransformation schreiben lässt, also als

$$\Lambda \; = \; R_1 \, B^s_x \, R_2$$

mit R_i und B^s_x wie in Aufgabe 17.

Tipp: Betrachten Sie Λe_1 und finden Sie R_1^{-1} sowie B_x^{-s} so, dass $B_x^{-s} R_1^{-1} \Lambda e_1 = e_1$.

Abgabe: Mittwoch, 29.05.2013, bis 17.00 Uhr im Postfach von Herrn Teufel.