S. Teufel, S. Haag, J. von Keler
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2013
29.05.2013

# Mathematische Physik: Klassische Mechanik

Übungsblatt 6

### Aufgabe 19: Der Hodge-Operator

In dieser Aufgabe zeigen wir, dass der Hodge-Operator $*$ auf $\Lambda_k$ für symmetrisches, nichtentartetes $g \in T_2^0$ die Gleichung

$$* \circ * \;=\; (-1)^{k\,(n-k)}\,\mathrm{sgn}(g) \tag{1}$$

erfüllt, wobei $\mathrm{sgn}(g)$ das Vorzeichen der Determinante von $g$ ist.

(a) Machen Sie sich zunächst klar, dass es eine Basis $(e^j)$ von $T_1^0$ gibt, in der die Matrix $g_{ij}$ von $g = g_{ij} e^i \otimes e^j$ diagonal ist, d.h. $g_{ij} = 0$ falls $i \neq j$.

(b) Sei $0 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n$ ein geordnetes $k$-Tupel mit $j_i \in \{1, \ldots, n\}$. Bestimmen Sie $*(e^{j_1} \wedge \cdots \wedge e^{j_k}) := i_{e^{j_1} \wedge \cdots \wedge e^{j_k}} \varepsilon$, wobei $(e^j)$ die Basis aus (a) sei.

(c) Zeigen Sie nun Gleichung (1).

### Aufgabe 20: Pull-Back und äußere Ableitung

Sei $f : M_1 \to M_2$ glatt und $g \in C^\infty(M_2)$. Zeigen Sie, dass

$$f^* \,\mathrm{d}g \;=\; \mathrm{d}\,(f^* g)\,.$$

### Aufgabe 21: Polarkoordinaten

Sei $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) | \, x \leq 0\}$. Auf $M$ sind die natürliche Karte $\varphi : M \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) | \, x \leq 0\}$, $\varphi = \mathrm{id}$ und die Karte zu Polarkoordinaten $\tilde{\varphi} : M \to (0,\infty) \times (-\pi, \pi)$, also

$$\tilde{\varphi}^{-1}(r, \alpha) \;=\; (r\cos\alpha, r\sin\alpha)\,,$$

verträglich. Drücken Sie $\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}y$ durch $\mathrm{d}r$ und $\mathrm{d}\alpha$ aus. Sei $g$ die euklidische Metrik auf $M$, d.h.

$$g \;=\; \mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}x \,+\, \mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}y.$$

Wie sieht $g$ in der durch $\mathrm{d}r$ und $\mathrm{d}\alpha$ erzeugten Basis von $\mathcal{T}_2^0(M)$ aus?

### Aufgabe 22: Hodge-Dualität im Minkowskiraum $*$

Sei $*$ der Hodgeoperator bzgl. der Minkowski-Metrik $\eta$ im $\mathbb{R}^4$, wobei wir die kanonischen Koordinaten mit $(t, x_1, x_2, x_3)$ bezeichnen, also $\eta = \mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}t - \sum_{i=1}^3 \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^i$. Berechnen Sie die Bilder der kanonischen Basisvektoren von $\Lambda_k(\mathbb{R}^4)$ für alle $k \leq 4$.
*Tipp: Sparen Sie Arbeit durch Anwenden von Formel (1) aus Aufgabe 19!*

### Aufgabe 23: Die Maxwell-Gleichungen $*$

Sei $*$ der Hodgeoperator bzgl. der Minkowski-Metrik $\eta$ im $\mathbb{R}^4$. Das elektrische Feld $E$, das magnetische Feld $B$ und die Stromdichte $J$ seien zeitabhängige Vektorfelder auf dem $\mathbb{R}^3$, also

$$E, B, J : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

und die Ladungsdichte $\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Alle Abbildungen werden als glatt vorausgesetzt. Man definiert die zugehörigen Differentialformen auf dem Minkowskiraum $\mathcal{J}, \mathcal{E} \in \Lambda_1(\mathbb{R}^4)$ und $\mathcal{B}, \mathcal{F} \in \Lambda_2(\mathbb{R}^4)$ durch

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &:= \rho\, \mathrm{d}t - J_i\, \mathrm{d}x^i, \\ \mathcal{E} &:= E_i\, \mathrm{d}x^i, \\ \mathcal{B} &:= *\,(-B_i\, \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x^i), \\ \mathcal{F} &:= \mathcal{B} - \mathrm{d}t \wedge \mathcal{E}\,. \end{aligned}$$

Zeigen Sie die folgenden zwei Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial t} + \mathrm{rot} E &= 0 \quad \& \quad \mathrm{div} B = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathrm{d}\mathcal{F} &= 0, \\ -\frac{\partial E}{\partial t} + \mathrm{rot} B &= 4\pi J \quad \& \quad \mathrm{div} E = 4\pi\rho \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathrm{d}(*\mathcal{F}) &= 4\pi(*\mathcal{J}). \end{aligned}$$

Die Maxwell-Gleichungen (linke Seite) haben also für die zugehörigen Differentialformen eine sehr einfache Form.

**Abgabe:** Mittwoch, 05.06.2013, bis 17.00 Uhr im Postfach von Herrn Teufel.