S. Teufel, S. Haag, J. von Keler
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2013
05.06.2013

Mathematische Physik: Klassische Mechanik

Übungsblatt 7

Aufgabe 24: Äußere Ableitung und Dachprodukt

Seien $\omega_1 \in \Lambda_p(M)$ und $\omega_2 \in \Lambda_k(M)$. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{d}(\omega_1 \wedge \omega_2) = \mathrm{d}\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge \mathrm{d}\omega_2 \,.$$

Aufgabe 25: Der Homotopie-Operator: Vorbereitung zu Aufgabe 26

Sei M eine Mannigfaltigkeit und $[0,1] \times M$ die Produktmannigfaltigkeit mit Rand $(\{0\} \times M) \cup (\{1\} \times M) \cup ((0,1) \times \partial M)$. Es bezeichne $\iota_t : M \to [0,1] \times M$, $x \mapsto (t,x)$ die natürliche Injektion und $\pi : [0,1] \times M \to M$, $(t,x) \mapsto x$ die Projektion auf M.

(a) Machen Sie sich klar, dass sich jedes $\omega \in \Lambda_p([0,1] \times M)$ aufspalten lässt in

$$\omega = \mathrm{d}t \wedge \omega_M + \omega_0 \,,$$

wobei $\omega_M \in \Lambda_{p-1}([0,1] \times M)$ gegeben ist durch $\omega_M(\cdots) = \omega(\partial_t, \cdots)$ und $\omega_0 \in \Lambda_p([0,1] \times M)$ gegeben ist durch $\omega_0|_{(t,\cdot)} = \pi^* \iota_t^* \omega$. Stellen Sie dazu beide Seiten der obigen Gleichung lokal bezüglich einer Koordinatenbasis $(\mathrm{d}t, \mathrm{d}q^1, \ldots, \mathrm{d}q^n)$ dar, wobei q lokale Koordinaten von M seien.

(b) Man definiert nun $K : \Lambda_p([0,1] \times M) \to \Lambda_{p-1}(M)$ durch

$$\omega = \mathrm{d}t \wedge \omega_M + \omega_0 \mapsto K\omega := \int_0^1 \omega_M(t)\,\mathrm{d}t \,,$$

wobei $\omega_M(t) := \iota_t^* \omega_M$ sei. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{d} \circ K + K \circ \mathrm{d} = \iota_1^* - \iota_0^* \,.$$

Aufgabe 26: Das Lemma von Poincaré

Sei $\omega \in \Lambda_p(M)$ geschlossen und M zusammenziehbar, d.h. es gibt eine glatte Abbildung

$$F : [0,1] \times M \to M \text{ mit } F(0,\cdot) = \mathrm{id}_M \text{ und } F(1,\cdot) \equiv x_0 \quad \text{für ein } x_0 \in M \,,$$

die also M stetig auf einen Punkt $x_0 \in M$ "zusammenzieht". Zeigen Sie, dass ω exakt ist, d.h. $\omega = \mathrm{d}\nu$ für ein $\nu \in \Lambda_{p-1}(M)$.

Tipp: Setzen Sie $\Omega := F^* \omega$ *und wenden Sie* $\mathrm{d} \circ K + K \circ \mathrm{d}$ *aus Aufgabe 25 (b) auf* Ω *an.*

Aufgabe 27: Die Kontinuitätsgleichung $*$
Sei $*$ der Hodgeoperator bzgl. der Minkowski-Metrik im $\mathbb{R}^4$. Weiterhin seien der Strom $J : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und die Ladungsdichte $\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ glatt. Wir definieren wieder die zugehörige 1-Form $\mathcal{J} \in \Lambda_1(\mathbb{R}^4)$ durch

$$\mathcal{J} := \rho \,\mathrm{d}t \,-\, J_i \,\mathrm{d}x^i \,.$$

Zeigen Sie, dass die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div} J = 0$$

äquivalent zu

$$\mathrm{d} * \mathcal{J} \;=\; 0$$

ist. Zeigen Sie weiterhin, dass die inhomogene Maxwellgleichung

$$\mathrm{d} * \mathcal{F} \;=\; * \mathcal{J}$$

genau dann eine Lösung $\mathcal{F}$ besitzt, wenn der Viererstrom $\mathcal{J}$ die Kontinuitätsgleichung erfüllt. Ist die Lösung eindeutig?

Abgabe: Mittwoch, 12.06.2013, bis 17.00 Uhr im Postfach von Herrn Teufel.