S. Teufel, S. Haag, J. von Keler
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2013
12.06.2013

Mathematische Physik: Klassische Mechanik

Übungsblatt 8

Aufgabe 28: Eigenschaften der Lie-Ableitung

Sei $\tau \in \mathcal{T}^r_s(M)$. Zeigen Sie, dass für alle $X, Y \in \mathcal{T}^1_0$ und alle $c \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{lrcl} \text{(a)} & L_{X+Y}\tau & = & L_X\tau + L_Y\tau\,, \\ \text{(b)} & L_{cX}\tau & = & c\,L_X\tau\,, \end{array}$$

und für $\omega \in \Lambda_k(M)$ für alle $f \in \Lambda_0(M)$

$$\text{(c)} \quad L_{fX}\omega \;=\; f\,L_X\omega + \mathrm{d}f \wedge i_X\omega$$

gilt.

Aufgabe 29: Kommutator und Jacobi-Identität

Sei $\tau \in \mathcal{T}^r_s(M)$. Zeigen Sie, dass für alle $X, Y, Z \in \mathcal{T}^1_0$

$$\begin{array}{lrcl} \text{(a)} & L_{[X,Y]}\,\tau & = & (L_XL_Y - L_YL_X)\,\tau, \\ \text{(b)} & 0 & = & \big[X,[Y,Z]\big] + \big[Y,[Z,X]\big] + \big[Z,[X,Y]\big] \end{array}$$

gilt.

Aufgabe 30: Integral geschlossener Formen über diffeotope Abbildungen

Es seien $N_0 = \psi_0(N) \subset M$ und $N_1 = \psi_1(N) \subset M$ jeweils das glatte Bild einer p-dimensionalen, kompakten, orientierbaren, randlosen Mannigfaltigkeit N in der n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M, also $\psi_0 : N \to M$ und $\psi_1 : N \to M$ glatte Abbildungen. Es seien ψ_0 und ψ_1 diffeotop, d.h. es gibt ein glattes $F : [0,1] \times N \to M$ so, dass

$$\psi_0 = F \circ \iota_0 : N \to N_0 \quad \text{und} \quad \psi_1 = F \circ \iota_1 : N \to N_1\,,$$

wobei ι_0 und ι_1 jeweils die Injektion von N in $\{0\} \times N$ bzw. $\{1\} \times N$ ist. Zeigen Sie, dass für jede geschlossene p-Form $\omega \in \Lambda_p(M)$ gilt:

$$\int_{N_0} \omega = \int_{N_1} \omega\,,$$

wobei

$$\int_{N_j} \omega := \int_N \psi_j^*\omega\,.$$

Überlegen Sie sich, wie die Aussage und der Beweis für eine Mannigfaltigkeit N mit Rand zu modifizieren sind.

Tipp: Die Aussage ist per Definition äquivalent zu $\int_N \psi_0^*\omega = \int_N \psi_1^*\omega$. Um letzteres zu zeigen, betrachten Sie die Form $F^*\omega \in \Lambda_p([0,1]\times N)$ und wenden Sie den Homotopie-Operator $\mathrm{d}\circ K + K\circ\mathrm{d}$ aus Aufgabe 25 darauf an, um zu folgern, dass $(\psi_0^* - \psi_1^*)\omega$ exakt ist. Dann liefert der Satz von Stokes die gewünschte Aussage.

Aufgabe 31: Die Unfrisierbarkeit des Igels $*$

Zeigen Sie, dass man einen Igel nicht frisieren kann, also die Gültigkeit der folgenden Aussage: Auf der n-dimensionalen Sphäre $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ hat für gerade Dimenison n jedes glatte Vektorfeld $X \in \mathcal{T}_0^1(S^n)$ mindestens eine Nullstelle.

Anleitung: Nehmen Sie an, es gäbe ein X ohne Nullstelle, dann können sie es o.B.d.A. auf $\|X\|_{\mathbb{R}^{n+1}} = 1$ normieren. Verwenden Sie die Eigenschaft $\langle X(x), x\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} = 0$ um eine Diffeotopie $F : [0,1] \times S^n \to S^n$ zwischen $\psi_0 : S^n \to S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $\psi_0(x) = x$ und $\psi_1 : S^n \to S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $\psi_1(x) = -x$, zu konstruieren. Finden Sie eine nirgends verschwindende Volumenform ω auf S^n, z.B. unter Verwendung des äußeren Normalenfeldes $n(x) = x$ an S^n und der kanonischen Volumenform ε auf $\mathbb{R}^{n+1}$. Zeigen Sie schließlich, dass ψ_1 für gerades n die Orientierung umkehrt, also

$$\int_{S^n} \omega = \int_{S^n} \psi_0^* \omega = - \int_{S^n} \psi_1^* \omega \,,$$

und führen Sie dies zum Widerspruch.

Abgabe: Mittwoch, 19.06.2013, bis 17.00 Uhr im Postfach von Herrn Teufel.