S. Teufel, S. Haag, J. von Keler
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2013
19.06.2013

Mathematische Physik: Klassische Mechanik

Übungsblatt 9

Aufgabe 32: Symplektische Endomorphismen

Sei (V, ω) ein symplektischer Vektorraum.

(a) Zeigen Sie: Eine lineare Abbildung $f : V \to V$ ist genau dann symplektisch, wenn

$$A^T J A \;=\; J$$

gilt. Hierbei sind $A_{ij} = f_i(e_j)$ und $J_{ij} = \omega(e_i, e_j)$ die darstellenden Matrizen von f und ω bzgl. einer beliebigen Basis $(e_i)_{i=1}^n$ von V.

(b) Zeigen Sie, dass ein linearer Hamiltonscher Fluss $\Phi_t^{X_H} : V \to V$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ symplektisch ist.

(c) Zeigen Sie, dass die symplektischen Endomorphismen von (V, ω) eine Gruppe bilden.

Aufgabe 33: Magnetische Felder in der Hamiltonschen Mechanik

Sei $V = \mathbb{R}^6$ zunächst ausgestattet mit der kanonischen symplektischen Form ω_0. Die Hamiltonfunktion für ein geladenes Teilchen im konstanten Magnetfeld $\vec{B} = (B_1, B_2, B_3)$ ist

$$H(q,p) = \tfrac{1}{2}\left(p + \tfrac{1}{2}Bq\right)^2 := \tfrac{1}{2}\langle p + \tfrac{1}{2}Bq, p + \tfrac{1}{2}Bq\rangle_{\mathbb{R}^3}\,,$$

wobei B die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -B_3 & B_2 \\ B_3 & 0 & -B_1 \\ -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

ist. Bestimmen Sie die zugehörigen Hamiltonschen Gleichungen.

Betrachten Sie die lineare Koordinatentransformation

$$T : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6\,, \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \tilde{q} \\ \tilde{p} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} q \\ p + \frac{1}{2}Bq \end{pmatrix}$$

und schreiben Sie die Hamiltonschen Gleichungen in den neuen Variablen $(\tilde{q}, \tilde{p})$.

Bestimmen Sie nun eine symplektische Form ω_B auf $\mathbb{R}^6$ so, dass $T : (\mathbb{R}^6, \omega_0) \to (\mathbb{R}^6, \omega_B)$ eine symplektische Abbildung ist.

Berechnen Sie schließlich die Hamiltonschen Gleichungen zur Hamiltonfunktion

$$\tilde{H}(\tilde{q}, \tilde{p}) = \tfrac{1}{2}|\tilde{p}|^2$$

bezüglich der neuen symplektischen Form ω_B.

Aufgabe 34: Der Fixpunktsatz von Brouwer (glatte Version)

Sei $D^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ die Vollkugel im $\mathbb{R}^n$ und $S^{n-1} = \partial D^n$ ihr Rand, die $n-1$-Sphäre.

Sei $f : D^n \to D^n$ eine glatte Abbildung. Zeigen Sie, dass f mindestens einen Fixpunkt besitzt, es also mindestens ein $x \in D^n$ mit $x = f(x)$ gibt.

Anleitung: Angenommen, es gibt keinen solchen Fixpunkt. Dann ist die Funktion $F : D^n \to S^{n-1}$ wohldefiniert, die jedem Punkt x den Schnittpunkt der in $f(x)$ startenden und durch x gehenden offenen Halbgerade mit S^{n-1} zuordnet. Es wirkt F auf $S^{n-1} \subset D^n$ also als Identität, d.h. $F \circ \iota = \mathrm{Id}$, wobei $\iota : S^{n-1} \to D^n$ die natürliche Injektion sei. Wenden Sie den Satz von Stokes auf $\omega := F^*\varepsilon$ an, um einen Widerspruch zu erhalten.

Bemerkung: Der Brouwersche Fixpunktsatz ist die Verallgemeinerung dieses Resultats auf stetige Funktionen f, wobei man im Beweis den Dichtheitssatz von Stone-Weierstrass verwendet.

Aufgabe 35: Der Laplace-Beltrami-Operator $*$

Sei M eine Mannigfaltigkeit mit Pseudo-Metrik $g \in \mathcal{T}^0_2(M)$ und $*$ der zugehörige Hodge-Operator. Auf $\Lambda_k(M)$ definiert man die Coableitung $\delta : \Lambda_k(M) \to \Lambda_{k-1}(M)$ durch $\delta := (-1)^k *^{-1} \mathrm{d} *$, wobei nach Aufgabe 19 auf Λ_k gilt, dass $*^{-1} = (-1)^{k(n-k)}\mathrm{sgn}(g)*$.

(a) Sei $M = \mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik. Zeigen Sie, dass für $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) = \Lambda_0(\mathbb{R}^n)$

$$(\delta \mathrm{d} + \mathrm{d}\delta) f = -\Delta f\,,$$

wobei $\Delta = \sum_{i=1}^n \partial^2_{q_i}$ den üblichen Laplace-Operator bezeichnet.

(b) Sei $M = \mathbb{R}^4$ mit der Minkowski-Metrik η. Zeigen Sie, dass für $f \in C^\infty(\mathbb{R}^4) = \Lambda_0(\mathbb{R}^4)$

$$(\delta \mathrm{d} + \mathrm{d}\delta) f = -\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) f.$$

(c) Wir betrachten wieder die Maxwellgleichungen und übernehmen die Notation aus den Aufgaben 23 und 27. Es erfülle $\mathcal{A} \in \Lambda_1(\mathbb{R}^4)$ die Wellengleichung im Minkowskiraum

$$\Box \mathcal{A} := (\delta \mathrm{d} + \mathrm{d}\delta)\mathcal{A} = \mathcal{J}$$

und die Lorenz-Eichung

$$\delta \mathcal{A} = 0\,.$$

Zeigen Sie, dass dann $\mathcal{F} = \mathrm{d}\mathcal{A}$ die Maxwellgleichungen löst.

Abgabe: Mittwoch, 26.06.2013, bis 17.00 Uhr im Postfach von Herrn Teufel.