SS 14 - Fachdidaktik I - Übungsblatt 4 vom 30.04.14 - Abgabe am 7.05.14

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Stellen Sie die Axiome für einen Körper übersichtlich zusammen. Beschreiben Sie, welche dieser Axiome für N bzw. Z nicht gelten.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Für die Schule wird oft die folgende Formulierung des Vollständigkeitsaxioms verwendet:
In R hat jede monoton steigende und nach oben beschränkte Folge einen Grenzwert.
a) Geben Sie die ersten 8 Glieder der Folge (a_n) mit $a_n \in Q$ $(n \in N)$ und folgenden Eigenschaften an (benützen Sie einen TR):
a_n hat n Nachkommastellen und ist die größte Zahl mit $a_n^2 < 2$.
Begründen Sie, dass (a_n) monoton steigend und nach oben beschränkt ist.

b) Schreiben Sie die *Liouville´sche Zahl* $L = \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-(k!)}$ so auf, dass ihr Aufbau für einen Schüler verständlich ist.

Begründen Sie, dass die Folge (l_n), $n \geq 1$, mit $l_n = \sum_{k=1}^{n} 10^{-(k!)}$ monoton steigend und nach oben beschränkt ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Eine Zahlenmenge M heißt abzählbar, wenn es eine Bijektion von den natürlichen Zahlen N nach M gibt.
Zeigen Sie in einer übersichtlichen Darstellung:
a) Die rationalen Zahlen sind abzählbar.
b) Die reellen Zahlen sind nicht abzählbar (überabzählbar).

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Geben Sie an, ob die Aussage wahr oder falsch ist.
a) Zu $a,b \in Q$ mit $a<b$ gibt es unendlich viele $z \in Q$ mit $a<z<b$.
Begründen Sie Ihre Antwort.
b) Zu $a,b \in R$ mit $a<b$ gibt es unendlich viele $z \in Q$ mit $a<z<b$.
Angabe von wahr oder falsch genügt.
c) Es gibt konvergente Folgen (x_n) mit $x_n \in Q$, deren Grenzwert in Q liegt und solche, deren Grenzwert g nicht in Q liegt.
Begründen Sie Ihre Antwort.
d) $\sqrt{2}+\sqrt{2}$ rational. Begründen Sie Ihre Antwort.
(Sie dürfen voraussetzen, dass $\sqrt{2}$ irrational ist)