SS 14 - Fachdidaktik I - Übungsblatt 5 vom 7.05.14 - Abgabe am 14.05.14

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Beweisen Sie exemplarisch die folgenden Sätze für ganzrationale Funktionen der Form
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$ vom Grad $n \leq 5$.
a) Wenn der Funktionsterm von f nur ungerade Hochzahlen von x besitzt, dann ist der Graph von f symmetrisch zum Ursprung.
b) Wenn der Graph von f symmetrisch zum Ursprung ist, dann besitzt der Funktionsterm von f nur ungerade Hochzahlen von x. Stellen Sie in b) die Argumente des Beweises prägnant dar.
Hinweis: Die Aussagen a) und b) gelten für beliebigen Grad n, entsprechend auch für gerade Hochzahlen.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
a) Bestimmen Sie die reellen und bei f zusätzlich die komplexen Nullstellen:
$f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x$ $\quad$ $g(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ $\quad$ $h(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$
b) Definition: Ein Polynom p hat an der Stelle a eine zweifache Nullstelle, wenn gilt
Es gibt ein Polynom g mit $p(x) = (x-a)^2 \cdot g(x)$ mit $g(a) \neq 0$.
Beweisen Sie den Satz: a ist genau dann zweifache Nullstelle von p, wenn für die Polynomfunktion gilt $p(a) = p'(a) = 0$ und $p''(a) \neq 0$.
Vorausgesetzt ist: Polynomfunktionen sind beliebig oft differenzierbar; Ableitungsregeln dürfen benützt werden.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Zum Erraten einer Nullstelle eines Polynoms nützt manchmal der Satz*:
Sei $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten a_i. Dann gilt:
Für jede <u>rationale</u> Nullstelle $x_0 = \frac{p}{q}$ (p aus Z; q aus N) des Polynoms ist p ein Teiler von a_0 und q ein Teiler von a_n, sofern der Bruch $\frac{p}{q}$ durchgekürzt ist.
a) Formulieren Sie den Satz für den Spezialfall, dass $a_n = 1$ ist.
Prüfen Sie, inwieweit man mit diesem Spezialfall die rationalen Nullstellen von
$f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 2$ und $g(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 2$ finden kann.
b) Bestimmen Sie mit * eine Nullstelle des Polynoms $h(x) = x^3 - 10{,}5x^2 + 30x - 12{,}5$.
c) Beweisen Sie den Satz*.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Die Definitionen I, II, III zeigen exemplarisch die historische Entwicklung des Funktionsbegriffs. Welche Definition ist allgemeiner, welche Definition halten Sie für die Schule geeignet, welche bringt den Sinn des Funktionsbegriffs am besten zum Ausdruck? Untermauern Sie Ihre Argumentation mit Beispielen.
I. *Funktion einer veränderlichen Größe nennt man eine Größe, die auf irgendeine Weise aus dieser veränderlichen Größe und Konstanten zusammengesetzt ist* (Bernoulli 1667 – 1748)
II. *Eine Funktion heißt y von x, wenn jedem Wert der veränderlichen Größe x innerhalb eines gewissen Intervalls ein bestimmter Wert von y entspricht; gleichviel, ob y in dem ganzen Intervall nach demselben Gesetze von x abhängt oder nicht, ob die Abhängigkeit durch mathematische Operationen ausgedrückt werden kann oder nicht* (Lejeune- Dirichlet 1805 – 1859)
III. *Es seien A und B nichtleere Mengen und f eine Teilmenge von AxB mit der Eigenschaft: Zu jedem $a \in A$ gibt es genau ein $b \in B$ mit $(a;b) \in f$. Dann heißt f eine Funktion von A nach B.*