Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Sommersemester 2014

Mathematik II für Biologen

Übungsblatt 3 (Abgabe am 25.04.2014)

Aufgabe 8 (Quantil-Quantil-Diagramm, Q-Q-Plot) (10 Punkte)

Uns liege das Histogramm einer Stichprobe vor, das auf den ersten Blick mehr oder weniger glockenförmig (wie eine Gauß-Kurve) aussieht. Daher stellen wir uns die Frage, ob es Parameter μ und σ gibt, so dass der Plot der Dichte der Normalverteilung,[4]

$$f_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right),$$

das Histogramm gut beschreibt.

Die folgende Darstellungsart, genannt Quantil-Quantil-Diagramm oder kurz Q-Q-Plot (auch normal plot und manchmal leider wenig spezifisch einfach nur Wahrscheinlichkeits-Diagramm), erlaubt es einem, dies zu überprüfen, ohne dafür zunächst die passenden Parameterwerte μ und σ zu bestimmen (bzw. zu raten, zu schätzen oder auszuprobieren). Auch können mit diesem Diagramm Abweichungen von der Gauß-Kurve leichter beurteilt werden.

Dazu definieren wir zunächst für $0 < \alpha < 1$ das (theoretische) α-Quantil $q_\alpha^{(\Phi)}$ für die Dichte der Standardnormalverteilung, $f_{0,1}$, und zwar ist $q_\alpha^{(\Phi)} \in \mathbb{R}$ diejenige Zahl, für die

$$\Phi\left(q_\alpha^{(\Phi)}\right) = \alpha\,, \quad \text{wobei} \quad \Phi(x) := \int_{-\infty}^{x} f_{0,1}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \mathrm{d}x\,,$$

z.B. ist $q_{0,975}^{(\Phi)} = 1{,}96$. Im Q-Q-Plot werden dann die Punkte

$$\left(q_{(i-1/2)/n}^{(\Phi)}, x_{(i)}\right), \quad i = 1, \ldots, n\,,$$

in einem zweidimensionalen Diagramm eingetragen, wobei $x_{(i)}$ die der Größe nach geordneten Werte der ursprünglichen Stichprobe sind.

Kurz gesagt, trägt man also die theoretischen Quantile der Normalverteilung gegen die empirischen Quantile der Stichprobe auf.

a) Welchen Wert hat die empirische Verteilungsfunktion $F(x)$ für x etwas kleiner als $x_{(i)}$ und für x etwas größer als $x_{(i)}$? Wenn wir versuchen, die (unstetige) Treppenfunktion F durch eine stetige Funktion zu nähern, welchem Wert sollte diese stetige Funktion dann an der Stelle $x_{(i)}$ möglichst nahe kommen?

b) Erzeugen Sie mit dem MATLAB-Befehl `qqplot` einen Q-Q-Plot der Daten aus `states.dat` aus Aufgabe 4. Markieren Sie darin die beiden Ausreißerstaaten aus Aufgabe 4d (mit Namen).

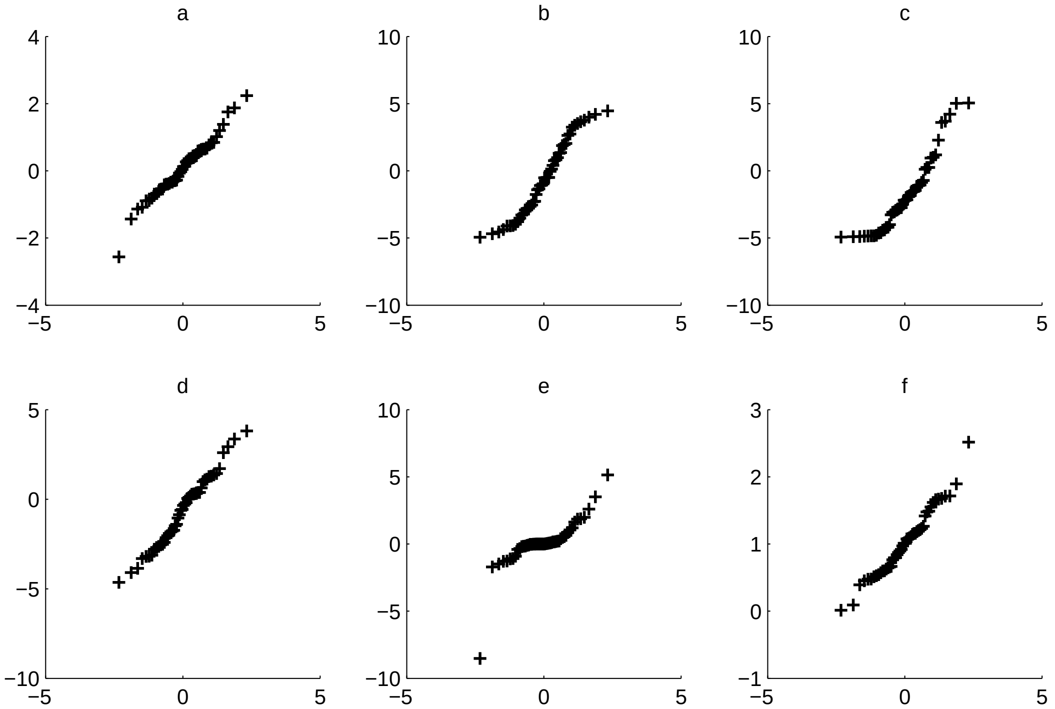
c) Lassen sich die Daten aus `states.dat` gut durch eine Normalverteilung beschreiben? (Bearbeiten Sie, bevor Sie diese Frage beantworten, zuerst Aufgabe 9.)

---

[4] Die Funktion $f_{\mu,\sigma}$ ist Ihnen bereits im Wintersemester in Aufgabe 15 begegnet. Sie wird im Laufe des Sommersemesters noch eine Rolle spielen.

Aufgabe 9 (10 Punkte)

Unten wird für die 6 Stichproben aus Aufgabe 1 jeweils der Q-Q-Plot gezeigt. Ordnen Sie die Q-Q-Plots a-f den Histogrammen A-F aus Aufgabe 1 zu, und begründen Sie kurz Ihre Entscheidung. Welche Histogramme lassen sich besser, welche schlechter durch eine Gauß-Kurve beschreiben? Wie sieht man dies den zugehörigen Q-Q-Plots an?



Aufgabe 10 (10 Punkte)

Führen Sie ein google-Experiment à la `http://xkcd.com/715/` mit einem eigenen Satz (oder Ausdruck) Ihrer Wahl durch. (Anführungszeichen nicht vergessen!) Variieren Sie dabei die, in Ihrem Ausdruck vorkommende, Zahl über einen sinnvollen Bereich. Notieren Sie Ihre Ergebnisse, stellen Sie sie sinnvoll graphisch dar und bestimmen Sie Mittelwert, Median und MAD der, in Ihrem Ausdruck vorkommenden, Größe.