

Mathematik II für Biologen

Übungsblatt 7 (Abgabe am 23.05.2014)

Aufgabe 21 (χ^2 -Test)

(10 Punkte)

Eine Maschine soll je 500 Nüsse einer Mischung bestehend aus Erd-, Hasel-, Cashew- und Pekannüssen im Verhältnis 5:2:2:1 in Tüten abfüllen.

- a) Wieviele Nüsse von jeder Sorte müsste jede Tüte enthalten (bei einer Gesamtzahl von 500), wenn das Verhältnis der genannten Sorten *exakt* 5:2:2:1 betragen sollte? (Dies sind die “erwarteten” Anzahlen.)

Nun wird jedoch nicht verlangt, dass genau 50% aller Nüsse in den Tüten Erdnüsse sind etc. (so wie nicht erwartet werden kann, dass bei 900 Würfeln eines fairen Würfels jede Augenzahl genau 150 mal geworfen wird), sondern es wird verlangt, dass sich die Maschine genauso verhält, als würde sie aus einem sehr sehr großen Container, der die genannten Nüsse gut gemischt genau im Verhältnis 5:2:2:1 enthält, ohne Zurücklegen nacheinander Nüsse ziehen und in die Tüte legen. Falls die Maschine dies erfüllt, kann der konkrete Inhalt einer Tüte zwar zufällig schwanken, aber “im Durchschnitt” sind die Nüsse in den verlangten Anteilen vorhanden.

Um zu testen, ob die Maschine richtig eingestellt ist und sich so verhält wie oben beschrieben (dies ist H_0) oder ob sie nicht richtig eingestellt ist (dies ist H_A), wird der Produktion eine Tüte entnommen und ihr Inhalt untersucht. Er besteht aus 269 Erd-, 112 Hasel-, 74 Cashew- und 45 Pekannüssen. (Dies sind die “beobachteten” Anzahlen.) Wir wählen als Teststatistik

$$\chi^2 := \sum_{i=1,2,3,4} \frac{(\text{beobachtete Anzahl Nüsse der Sorte } i - \text{erwartete Anzahl Nüsse der Sorte } i)^2}{\text{erwartete Anzahl Nüsse der Sorte } i},$$

vgl. T aus Aufgabe 20. Je größer der Wert von χ^2 desto größer der Verdacht, dass H_A gilt, d.h. dass die Maschine nicht richtig eingestellt ist. Man könnte nun wie in Aufgabe 20 den p-Wert mittels Monte-Carlo-Simulation schätzen und dann je nachdem, ob der (geschätzte) p-Wert kleiner als α ist oder nicht, H_0 verwerfen oder nicht. Für den Fall $\alpha = 5\%$ kann man jedoch stattdessen folgende Faustregel⁵ für den Verwerfungsbereich anwenden: *Verwerf H_0 auf dem Signifikanz-Niveau $\alpha = 5\%$, falls $\chi^2 > \nu + 2\sqrt{2\nu}$, wobei ν die sog. Anzahl der Freiheitsgrade ist.* Die Anzahl ν der Freiheitsgrade ist gleich der Anzahl Klassen (hier =4) minus 1, d.h. hier $\nu = 4 - 1 = 3$.

- b) Berechnen Sie diese “kritische Grenze” $\nu + 2\sqrt{2\nu}$.
c) Berechnen Sie den Wert der Teststatistik χ^2 .
d) Wie lautet demnach die Testentscheidung?
e) Testen Sie mit einem χ^2 -Test ohne Simulation, ob die Daten aus Aufgabe 20 auf dem Signifikanz-Niveau $\alpha = 5\%$ mit Mendels Hypothese vereinbar sind.

Aufgabe 22

(10 Punkte)

Bei einer Kunstaussstellung werden 12 Gemälde gezeigt, von denen 10 Originale sind. Ein Kunstsammler wählt zufällig ein Bild aus, befragt aber, bevor er es kauft, eine Expertin. Diese gibt mit Wahrscheinlichkeit $\frac{9}{10}$ eine richtige Beurteilung ab. Wenn die Expertin das Bild für eine Fälschung hält, gibt der Sammler es zurück und wählt ein anderes.

- a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein von der Expertin als Fälschung deklariertes Bild ein Original, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine Fälschung?
b) Wenn ein zweites Bild ausgewählt wird, mit welcher Wahrscheinlichkeit ist dieses dann ein Original?

Definieren Sie geeignete Ereignisse, und verwenden Sie die Notation für (bedingte) Wahrscheinlichkeiten.

⁵Diese Faustregel kann angewandt werden, wenn für etwa 80% der betrachteten Klassen gilt, dass die erwartete Anzahl jeweils ≥ 4 ist, und für die restlichen Klassen die erwartete Anzahl jeweils ≥ 1 ist. Dies ist hier erfüllt.

Aufgabe 23

(10 Punkte)

Man kann die χ^2 -Teststatistik aus Aufgabe 21 (und 20) auch benutzen, um zu testen, ob die Daten zu gut zum Modell passen, um echt zu sein.

- a) (MATLAB) Angenommen jemand behauptet, er hätte 600 Mal einen fairen Würfel geworfen und dabei jede Augenzahl genau 100 Mal beobachtet. Würden Sie ihm glauben? Schliesslich entsprechen die beobachteten Anzahlen n_i von Würfeln der Zahl i genau den für einen fairen Würfel erwarteten Zahlen, d.h. die Teststatistik χ^2 ist 0. Oder ist die Übereinstimmung hier zu gut, um wahr zu sein? Führen Sie das Experiment, einen fairen Würfel 600 mal zu werfen, n -mal durch (n groß) und überprüfen Sie, in wievielen Fällen $\chi^2 = 0$ beobachtet wurde. Interpretieren Sie das Ergebnis. (Hier ist sozusagen H_0 : *Daten sind echt* und H_A : *Daten sind gefälscht*.)

```
>> n=10^5; % n kleiner waehlen, falls Rechner zu langsam
>> chi_quadrat=zeros(1,n);
>> anzahl=zeros(1,6);
>> for k=1:n
    wuerfe=unidrnd(6,1,600);
    for i=1:6
        anzahl(i)=sum(wuerfe==i);
    end
    chi_quadrat(k)=sum((anzahl-[100 100 100 100 100 100]).^2/100);
end
>> sum(chi_quadrat==0)/n % sum(T==0) zaehlt, wie oft T==0 beobachtet wurde.
```

- b) (MATLAB) *Hat Mendel geschummelt?* Ermitteln Sie mittels Monte-Carlo-Simulation, wie groß in etwa die Wahrscheinlichkeit dafür ist, bei Gültigkeit der Mendelschen Gesetze für 556 Erbsen einen Wert von χ^2 zu erhalten, der *kleiner* ist als der in Aufgabe 20 a berechnete. Spricht dies dafür, dass Mendel seine Zahlen geschönt hat?
- c) Mendel hat viele Versuche durchgeführt, nicht nur den oben erwähnten. Angenommen, in Teil b konnte gezeigt werden, dass die Zahlen in obigem Beispiel so gut zu den theoretisch zu erwartenden passen, dass es statistisch signifikant auf dem Signifikanz-Niveau von $\alpha = 10\%$ ist, dass sie nicht mehr rein zufällig zustande gekommen sein können. Welches Argument könnte man dennoch zur Verteidigung von Mendel anführen?

Aufgabe 24

(10 Punkte)

Beim Spiel Würfelzwerge von Selecta gibt es Kärtchen, auf denen Zwerge mit drei Kleidungsstücken (Mütze, Jacke und Hose) dargestellt sind. Die Kleidungsstücke kommen in 6 unterschiedlichen Farben (rot, gelb, grün, blau, lila und pink) vor. Man würfelt mit drei Farbwürfeln und muss schnell einen Zwerg finden, der Kleidung in der entsprechenden Farbkombination trägt. Zu jeder möglichen Farbkombination gibt es genau einen Zwerg, d.h., wenn es einen Zwerg mit gelber Mütze, gelber Jacke und blauer Hose gibt, dann kann es keinen mit gelber Mütze, blauer Jacke und gelber Hose geben, aber sehr wohl noch einen mit gelber Mütze, blauer Jacke und blauer Hose.

- a) Wie groß ist jeweils die Wahrscheinlichkeit, mit fairen Farbwürfeln die Kombination für einen ein-, zwei- oder dreifarbigem Zwerg zu würfeln?
- b) Wieviele ein-, zwei- und dreifarbige Zwerge gibt es jeweils?
- c) Wieviele Kärtchen hat das Spiel?

Aufgabe 25

(24 Zusatzpunkte)

Üben Sie bis spätestens 29.06.14 auf www.khanacademy.org die *Skills*

- | | |
|--|--|
| <ul style="list-style-type: none">• <i>Counting 2,</i>• <i>Basic set notation,</i>• <i>Probability space,</i>• <i>Constructing probability distributions,</i> | <ul style="list-style-type: none">• <i>Independent probability,</i>• <i>Compound events,</i>• <i>Dependent probability</i> und• <i>Multiplying dependent probabilities.</i> |
|--|--|

Je *Skill*, für die Sie am Stichtag den Status *Practiced* oder *Level One* erreicht haben, erhalten Sie 2 Punkte. Für den Status *Level Two* oder *Mastered* schreiben wir 3 Punkte gut.

HINWEISE siehe Aufgabe 3 (Blatt 1).