Mathematik II für Biologen

Beschreibende Statistik
Zweidimensionale (bivariate) Daten

Stefan Keppeler

25. April 2014

EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Hirn und Gebiss

SPIEGEL ONLINE WISSENSCHAFT

Login | Registrierung

Politik | Wirtschaft | Panorama | Sport | Kultur | Netzwelt | Wissenschaft | Gesundheit | einestages | Karriere | Uni | Schule | Reise | Auto

Nachrichten > Wissenschaft > Mensch > Anthropologie > Frühmenschen: Das Gehirn wuchs als die Zähne schrumpften

Frühmenschen: Wer denkt, muss weniger kauen

Von Frank Patalong

AFP

Spanische Forscher sind auf ein Rätsel in der Entwicklung früher Menschen gestoßen: Je mehr das menschliche Gehirn an Größe gewann, desto kleiner wurden seine Zähne - eine "evolutionäre Paradoxie". Denn eigentlich müsste das Gebiss mitwachsen.

Montag, 07.04.2014 – 08:59 Uhr

http://www.spiegel.de/wissenschaft/mensch/fruehmenschen-das-gehirn-wuchs-als-die-zaehne-schrumpften-a-962548.html

“Der Mensch ist der einzige Primat, dessen Backenzähne immer kleiner wurden, während sein Gehirn an Größe zunahm.

“Tatsächlich verschoben sich im Laufe der Entwicklung der Gattung Homo die Proportionen des menschlichen Schädels zwischen Hirnschädel und Gesichtsschädel sowie Kiefer. Während Ersterer immer weiter ‘anschwoll’, um das wachsende Volumen des Gehirns zu beherbergen, geriet der Rest zunehmend ‘zierlicher’.

“[Die Forscher] stellten dabei zum einen fest, dass die Vertreter der Gattung Homo die einzigen Primaten waren und sind, bei denen die geschilderte Korrelation in Kontinuität festgestellt werden kann.”

Stichprobe (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots$, (x_n, y_n) von Paaren von Zahlen.
Oft:

- x: Ausgangsgröße, “unabhängige” Variable
- y: Zielgröße, Idee $y = f(x)$, “abhängige” Variable

Beispiel 1: Grille (`vgl. Mathematik I, Aufgabe 68`)

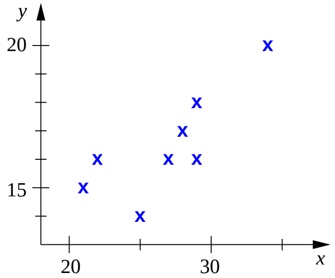
- x_i: Temperatur $[^\circ\mathrm{C}]$
- y_i: Zirpfrequenz (Tonhöhe) $[1/\mathrm{s}]$

x_i	21	22	25	27	28	29	29	34
y_i	15	16	14	16	17	16	18	20

x_i	21	22	25	27	28	29	29	34
y_i	15	16	14	16	17	16	18	20

Beschreibungsmöglichkeiten

- Wende Methoden für eindimensionale Stichproben getrennt auf x und y an.
  Nachteil: Zusammenhang zwischen x und y geht verloren.
- Graphisch: Streudiagramm (scatter plot)



Falls Streudiagramm eine Gerade suggeriert: Lineare Regression
`(siehe Mathematik I, Vorlesung 14)`

$$y(x) = mx + b + \text{“kleiner Fehler”}$$

Wähle m und b so, dass

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - (mx_i + b))^2$$

minimal. Ergebnis:

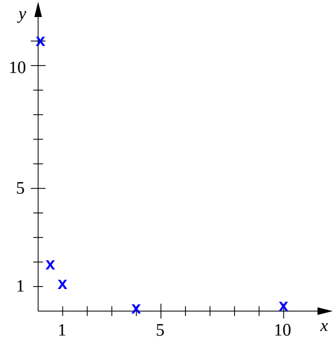
$$m = \frac{\sum (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum (x_i - \overline{x})^2}, \qquad b = \overline{y} - m\overline{x}$$

Manchmal erinnert das Streudiagramm erst nach Transformation(en) an eine Gerade,

$$x_i \mapsto g(x_i)\,, \qquad y_i \mapsto f(y_i)\,.$$

Beispiel 2: Andere Stichprobe

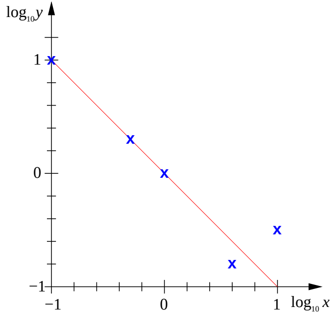
x_i	0,1	0,5	1,0	4,0	10
y_i	11	1,9	1,1	0,15	0,2



Sieht nicht nach Gerade aus...
Vielleicht Potenzgesetz?

x_i	0,1	0,5	1,0	4,0	10
y_i	11	1,9	1,1	0,15	0,2

$\log_{10} x_i$	$-1{,}0$	$-0{,}3$	0,0	0,6	1,0
$\log_{10} y_i$	1,0	0,3	0,0	$-0{,}8$	$-0{,}7$

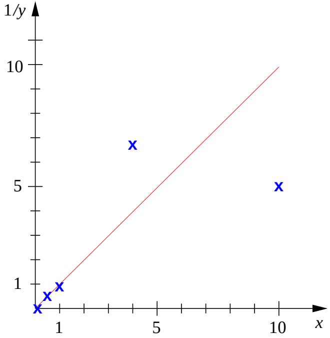


Ungefähr Gerade mit Steigung -1.
Also wäre auch $y_i \mapsto 1/y_i$ gut gewesen...

EBERHARD KARLS UNIVERSITÄT TÜBINGEN

x_i	0,1	0,5	1,0	4,0	10
y_i	11	1,9	1,1	0,15	0,2

x_i	0,1	0,5	1,0	4,0	10
$1/y_i$	0,1	0,5	0,9	6,7	5,0



Gerade mit Steigung 1?

Die Produktmomenten-Korrelation r_{xy} nach Pearson
misst die Stärke eines linearen Zusammenhangs zwischen x und y,

$$r_{xy} := \frac{s_{xy}}{s_x \, s_y} \,,$$

wobei:

$$s_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) \qquad \text{Stichprobenkovarianz,}$$

$$s_x, s_y \qquad \text{Standardabweichungen.}$$

Für den Wert gilt immer: $-1 \leq r_{xy} \leq 1$, denn...

Interpretation: Kosinus des Winkels zwischen den Vektoren

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \big(x_1 - \overline{x}, \ldots, x_n - \overline{x}\big) \\ \vec{b} &= \big(y_1 - \overline{y}, \ldots, y_n - \overline{y}\big) \end{aligned} \,, \qquad r_{xy} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$$

Für den Wert gilt immer: $-1 \leq r_{xy} \leq 1$.

Je näher $|r_{xy}|$ bei 1, desto stärker ist der lineare Zusammenhang zwischen x und y.

$\lvert r_{xy} \rvert = 1$	perfekter linearer Zusammenhang
$r_{xy} \approx 0$	kein linearer Zusammenhang

Vorzeichen (VZ):
VZ von r_{xy} = VZ der Steigung m der Regressionsgeraden

Beispiele:

- "Grille": $r_{xy} = 0{,}8$
- Beispiel 2: $r_{xy} = -0{,}5$
- weitere qualitativ...

Die Rangkorrelation nach Spearman misst die Stärke eines monotonen Zusammenhangs, zwischen x und y,

$$r_{xy}^{(\mathrm{SP})} = r_{\mathrm{Rang}(x)\,\mathrm{Rang}(y)}$$

In Beispiel 2:

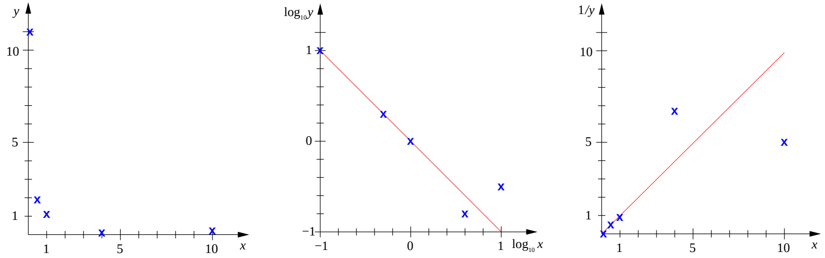
x_i	0,1	0,5	1,0	4,0	10
y_i	11	1,9	1,1	0,15	0,2

$\mathrm{Rang}\, x_i$	1	2	3	4	5
$\mathrm{Rang}\, y_i$	5	4	3	1	2

$r_{xy}^{(\mathrm{SP})} = -0{,}9$, aber $r_{xy} = -0{,}5$:

Monotoner Zusammenhang, aber nicht linear.

Übrigens: $r_{xy}^{(\mathrm{SP})}$ robust, r_{xy} nicht.



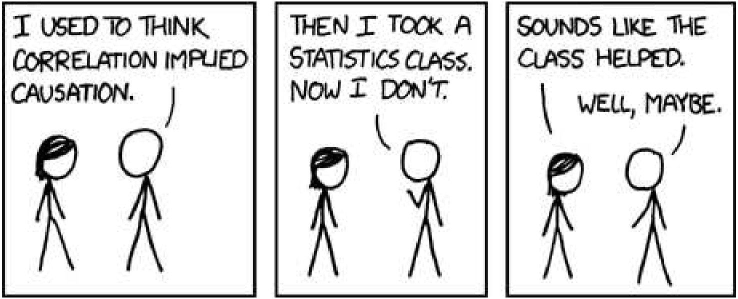
$r_{xy} = -0{,}5$ $\quad$ $r = -0{,}97$ $\quad$ $r = 0{,}74$

$r_{xy}^{(\mathrm{SP})} = -0{,}9$ $\quad$ $r^{(\mathrm{SP})} = -0{,}9$ $\quad$ $r^{(\mathrm{SP})} = 0{,}9$

$\left|r_{xy}^{(\mathrm{SP})}\right|$ ändert sich nicht bei monotoner Transformation.

Vorsicht: Interpretation von Korrelationen nicht einfach!

- r (mit kleinem Betrag) kann rein zufällig von Null verschieden sein. Ob zufällig oder nicht: Schließende Statistik (später)
- Eine Korrelation $r \neq 0$ sagt nichts über einen ursächlichen Zusammenhang. Viele Möglichkeiten:
  - x beeinflußt y.
  - y beeinflußt x.
  - x und y haben eine gemeinsame Ursache z.
  - Schein-Korrelationen, z.B.: Seien x, y, z unkorreliert. Dann sind x/z und y/z automatisch korreliert.
  - V.a. bei Zeitreihen: Unabhängige lineare Trends in x und y führen zu "Unsinns-Korrelationen". Beispiel:
    x_i = # Störche im Jahr $1900 + i$
    y_i = # Geburtenrate im Jahr $1900 + i$
    r_{xy} deutlich von Null verschieden $\Rightarrow$???



http://xkcd.com/552