

Mathematik II für Biologen
Schließende Statistik: Hypothesentests (Forts.)

Stefan Keppeler

9. Mai 2014



Testablauf (Wdh.)

Ein- und zweiseitige Tests

p-Wert

- Definition

- Äquivalente Definition

- Interpretation verschiedener p-Werte

Vertrauensintervall

Fehler 1. und 2. Art

- Fehler 2. Art und Macht des Tests

Erweitertes Testschema

- p-Wert

- Vertrauensintervall



	Allgemein	im Beispiel
1	Nullhypothese H_0	$k = 80$
2	Alternativhypothese H_A	$k > 80$
3	Wähle Teststatistik X	$\# \left\{ \begin{array}{l} \text{kranke Individuen unter} \\ 10 \text{ zufällig gewählten} \end{array} \right\}$
4	Verteilung von X falls H_0 wahr	Simulation
5	Wähle Signifikanzniveau α	$\alpha = 5\%$
6	Verwerfungsbereich K (aus 4 & 5)	$K = \{3, 4, 5, \dots, 10\}$
7	Bestimme X aus Daten	$X = 3$
8	Testentscheidung: $X \in K$ oder $X \notin K$?	$X \in K$: H_0 wird verworfen

Merke: Je kleiner α desto schwieriger wird es, H_0 zu verwerfen.

Beispiel: Hätten wir $\alpha = 1\%$ gewählt, so wäre $K = \{4, 5, \dots, 10\}$ gewesen und damit $X = 3 \notin K$...



- ▶ Einseitige Tests haben die Form

$$H_0 : k = k_0$$

$$H_A : k > k_0 \quad (\text{oder } H_A : k < k_0)$$

Behauptung, die gezeigt werden soll:

k ist größer (kleiner) als erwartet.

- ▶ Zweiseitige Tests haben die Form

$$H_0 : k = k_0$$

$$H_A : k \neq k_0$$

Behauptung, die gezeigt werden soll:

k weicht von Erwartung ab (egal in welche Richtung.)



Im Beispiel: Falls $X = 3$ beobachtet wurde, so wird...

... H_0 verworfen für $\alpha = 5\%$

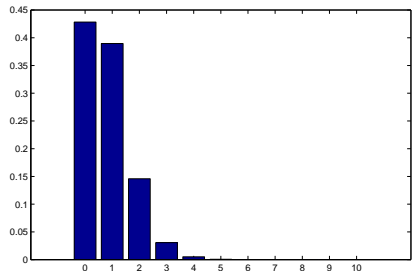
... H_0 nicht verworfen für $\alpha = 1\%$

... H_0 verworfen, falls $\alpha \geq 3,6\%$

... H_0 nicht verworfen für $\alpha < 3,6\%$

Definition: Das Signifikanzniveau, an dem der Test zwischen *verwerfen* und *nicht verwerfen* schwankt, heißt **p-Wert**.

Im Beispiel: Für $X = 3$ beträgt der p-Wert **3,6%**



≈3,6%



Äquivalent: Der p-Wert ist die Wahrscheinlichkeit (unter H_0) dafür, etwas zu beobachten, das H_A mindestens so stark unterstützt wie das, was tatsächlich beobachtet wurde.

Im Beispiel: $X = 3$ beobachtet (in 3% der Fälle); noch mehr als $X = 3$ würde $X = 4, 5, \dots, 10$ die Alternativhypothese H_A unterstützen.

$X \geq 3$ wird in 3,6% der Fälle beobachtet (p-Wert).



Interpretation verschiedener p-Werte: (mit Vorsicht zu genießen)

$$p\text{-Wert} > 5\%$$

Test nicht einmal signifikant auf 5%-Niveau:
kein (statistischer) Widerspruch zwischen
Daten und Modell H_0

$$5\% \geq p\text{-Wert} > 1\%$$

Test signifikant auf 5%- aber nicht auf 1%-Niveau:
schwacher Widerspruch zwischen Daten und H_0

$$1\% \geq p\text{-Wert} > 0,1\%$$

Test signifikant auf 1%- (also auch auf 5%-)
aber nicht auf 0,1%-Niveau

$$0,1\% \geq p\text{-Wert}$$

Test (sogar) signifikant auf 0,1%-Niveau:
sehr starker Widerspruch zwischen Daten und H_0



Angenommen, $X = 3$ wurde beobachtet (und $\alpha = 5\%$) dann...

- ▶ wird $H_0: k = 80$ verworfen zugunsten von $H_A: k > 80$
- ▶ würde $H_0: k = 79$ erst recht verworfen zugunsten von $H_A: k > 79$, ebenso wie $H_0: k = k_0$ zugunsten von $H_A: k > k_0$ für alle $k_0 \leq 80$.

Was passiert für $k_0 > 80$?

Neue Rechnung/Simulation (wiederhole Testschritt 4) zeigt

- ▶ $H_0: k = k_0$ wird verworfen zugunsten von $H_A: k > k_0$ für alle $k_0 \leq 87$,
- ▶ $H_0: k = k_0$ wird nicht verworfen zugunsten von $H_A: k > k_0$ für alle $k_0 > 87$,

denn (für $X = 3$):

k_0	87	88
p-Wert	4,87% < 5%	5,02% > 5%







Definition: Das $(1 - \alpha)$ -**Vertrauensintervall** (Konfidenzintervall, -bereich) für k besteht aus denjenigen Zahlen k_0 für die $H_0 : k = k_0$ **nicht verworfen** wird.

Im Beispiel: Falls $X = 3$ beobachtet wurde:
95%-Vertrauensintervall für k : $\{88, 89, \dots, 1000\}$.

Merke: Das Vertrauensintervall hängt (wie der p-Wert) vom beobachteten Wert von X ab.



	H_0 wird verworfen	H_0 wird nicht verworfen
H_0 ist wahr	 Fehler 1. Art	 Richtige Entscheidung
H_0 ist falsch	 Richtige Entscheidung	 Fehler 2. Art

- ▶ Fehler 1. Art \leftrightarrow Signifikanzniveau:
Falls H_0 gilt, so begeht der Test in $\leq \alpha$ der Fälle einen Fehler 1. Art (gemäß Konstruktion des Verwerfungsbereichs K).
- ▶ Fehler 2. Art \leftrightarrow Zusätzliche Annahmen, Simulation...

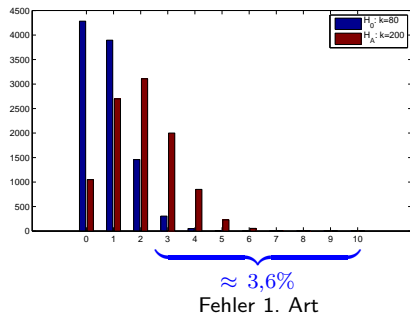


Beispiel: $H_0 : k = 80$, $\alpha = 5\%$, $K = \{3, 4, 5, \dots, 10\}$

Annahme: In Wirklichkeit gilt nicht H_0 sondern $H_A : k = 200$.

```
N=1000;  
k=200;  
X=[];  
for wdh=1:10^4 % besser 10^5  
    urne=[ones(1,k),zeros(1,N-k)];  
    n=10;  
    stichprobe=[];  
    for j=1:n  
        kugel=unidrnd(length(urne));  
        stichprobe=[stichprobe,urne(kugel)];  
        urne(kugel)=[];  
    end;  
    X=[X,sum(stichprobe)];  
end  
  
verteilungH0=[4283 3896 1458 306 51 6 0 0 0 0 0]  
Z=[verteilungH0,hist(X,0:10)];  
Z=reshape(Z,11,2);  
bar(0:10,Z)  
legend('H_0: k=80','H_A: k=200')
```

Fehler 2. Art Macht des Tests
 $\beta \approx 69\%$ $1-\beta \approx 31\%$



Beispiel (Forts.): (Annahme: H_A gilt)

- ▶ In 31% der Fälle wird H_0 verworfen, in 69% der Fälle nicht.
- ▶ Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art ist $\beta = 69\%$ (falls H_A gilt).
- ▶ $1 - \beta$ (hier = 31%) heißt **Macht des Tests**.



	einfacher Test	Test mit p-Wert
1	Nullhypothese H_0	
2	Alternativhypothese H_A	
3	Wähle Teststatistik X	
4	Verteilung von X falls H_0 wahr	
5	Wähle Signifikanzniveau α	
6	Verwerfungsbereich K (aus 4 & 5)	
7	Bestimme X aus Daten	
8	Testentscheidung: $X \in K$ oder $X \notin K$?	
9		p-Wert (aus 4 & 7)
10		Testentscheidung: p-Wert $\leq \alpha$ oder $> \alpha$

$X \in K$ bzw. p-Wert $\leq \alpha$: H_0 wird verworfen
 (H_A statistisch bewiesen)

$X \notin K$ bzw. p-Wert $> \alpha$: H_0 wird nicht verworfen



	Testschemata	$(1-\alpha)$ -Vertrauensintervall	
1	Nullhypothese H_0	enthält einen Parameter	
2	Alternativhypothese H_A		
3	Wähle Teststatistik X		
4	Verteilung von X falls H_0 wahr		
5	Wähle Signifikanzniveau α	bereits festgelegt	
6	Verwerfungsbereich K (aus 4 & 5)		
7	Bestimme X aus Daten		
8	Testentscheidung: $X \in K$ oder $X \notin K$?		
9	p-Wert (aus 4 & 7)		
10	Testentscheidung: p-Wert $\leq \alpha$ oder $> \alpha$		

$X \in K$ bzw. p-Wert $\leq \alpha$: Wert des Parameters liegt nicht im Vertrauensintervall für den Parameter

$X \notin K$ bzw. p-Wert $> \alpha$: Wert des Parameters liegt im Vertrauensintervall

