Mathematik II für Biologen

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Stefan Keppeler

16. Mai 2014

EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

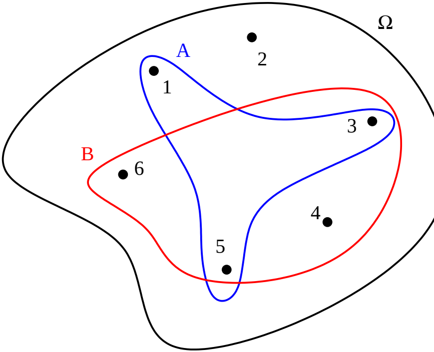
Grundbegriffe: Ereignisse

Wahrscheinlichkeitsmaße: Kolmogorov Axiome

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Satz von Bayes
- Beispiel: Diagnostischer Test
- Beispiel: Gefangenenparadoxon

- Elementarereignis ω: (nicht weiter zerlegbares) Ergebnis eines einzelnen Experiments
- Ereignisraum Ω: Menge aller Elementarereignisse
- Ereignis A: Teilmenge von Ω



Beispiel: Würfel

$\Omega = \{$⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅$\}$

$A = \{$⚀, ⚂, ⚄$\}$ (Ergebnis ungerade)

$B = \{$⚂, ⚃, ⚄, ⚅$\}$ (Ergebnis $\geq$ 3)

- Menge aller Ereignisse $\Sigma = \mathcal{P}(\Omega)$:
  Potenzmenge (Menge aller Teilmengen) von Ω

EBERHARD KARLS UNIVERSITÄT TÜBINGEN

Definition: Eine Funktion $P : \Sigma \to [0,1]$ heißt Wahrscheinlichkeitsmaß, falls gilt

(1) $P[\Omega] = 1$

(2) Falls $A_1, A_2, \ldots$ disjunkt (d.h. $A_j \cap A_k = \emptyset$, $\forall j \neq k$), so folgt

$$P\left[\bigcup_{j\geq 1} A_j\right] = \sum_{j\geq 1} P[A_j]\,,$$

insbesondere: Falls A, B disjunkt (d.h. $A \cap B = \emptyset$), so folgt

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B]\,.$$

Beispiele:

- Laplace'scher Wahrscheinlichkeitsraum
- verschiedene Würfel

Folgerungen:

(i) $P[A^C] = 1 - P[A]$

(ii) $P[\emptyset] = 0$

(iii) Für beliebiege $A, B \subset \Omega$ gilt:
$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$

Beweise:

Beispiel:

Definition: Seinen $A, B \subseteq \Omega$, $P[B] \neq 0$, so heißt

$$P[A|B] := \frac{P[A \cap B]}{P[B]}$$

bedingte Wahrscheinlichkeit von A gegeben B.

Beispiel:

Definition: Zwei Ereignisse A und B heißen unabhängig, falls gilt

$$P[A \cap B] = P[A]\, P[B]\,.$$

(D.h. $P[A|B] = P[A]$ falls $P[B] \neq 0$ und
$P[B|A] = P[B]$ falls $P[A] \neq 0$)

Satz von Bayes:

Seien $A_1, A_2, \ldots, A_n$ disjunkt, $\Omega = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$ und $B \subseteq \Omega$ mit $P[B] \neq 0$ beliebig.

Dann gilt für jedes $j = 1, \ldots, n$

$$P[A_j|B] = \frac{P[B|A_j]\, P[A_j]}{\sum_{k=1}^{n} P[B|A_k]\, P[A_k]} \,.$$

Beweis:

- Eine Krankheit tritt bei 1% der Bevölkerung auf (Prävalenz)
- Test liefert bei 98% der Kranken ein positives Ergebnis (Sensitivität)
- Test liefert bei 95% der Gesunden ein negatives Ergebnis (Spezifität)

	Test positiv B	Test negativ B^C
Person krank A_1	o.k.	falsch
Person gesund A_2	falsch	o.k.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit (einer zufällig getesteten Person), krank zu sein, wenn der Test positiv ist?

$$P[A_1|B] = ?$$

- In einem Gefängnis sitzen drei zum Tode verurteilte Gefangene: Anton, Brigitte und Clemens.
- Genau einer von ihnen soll begnadigt werden. Dazu wird ein Los gezogen, das allen die gleiche Chance gibt, begnadigt zu werden.
- Anton, der also eine Überlebenswahrscheinlichkeit von $\frac{1}{3}$ hat, bittet den Wärter, der das Ergebnis des Losentscheids kennt, ihm einen seiner Leidensgenossen, Brigitte oder Clemens, zu nennen, der oder die sterben muss.
- Der Wärter antwortet "Brigitte"

Wie hoch ist nun Antons Überlebenswahrscheinlichkeit?

EBERHARD KARLS UNIVERSITÄT TÜBINGEN