Fakultät

$0! = 1$

$1! = 1$

$2! = 2\cdot 1 = 2$

$3! = 3\cdot 2\cdot 1 = 6$

$n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 1 \quad (n \geq 1)$

Urnenmodell: ohne Zurücklegen, mit Beachtung d. Reihenfolge

$$n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-k+1)\,\frac{(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

1. Ziehung 2. Z. 3. Z. k-te Ziehung

Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

"n über k" ("k aus n")

Bsp: $\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!\,5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2}} = 56$

Spezialfälle:

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = \frac{n!}{(n-0)!\,0!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

$$\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = \frac{n!}{(n-1)!} = n$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{\underline{k!}\,\underline{(n-k)!}} = \binom{n}{n-k}$$

$\binom{n}{k} := 0$ für $k > n$

Beweis bzw. Herleitung d. Binomialverteilung

Bsp: $n = 8$

$$P[+--++++-] = P[+]^5 \cdot P[-]^3$$

$$= p^5 \cdot (1-p)^3$$

andere Möglichkeiten für 5 mal "+" und 3 mal "−"
durch Umordnen der +/− -Zeichen

hier: 8 Elemente, je 5 & 3 gleich ("+", "−")

$$\Rightarrow \frac{8!}{5!\,3!} = \binom{8}{5}$$

allg: n Elemente, k mal "+", $n-k$ mal "−"

$\binom{n}{k}$ Möglichkeiten

jede mit Wahrscheinlichkeit $p^k (1-p)^{n-k}$

$$\Rightarrow \mathbb{P}[k \text{ mal } +] = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

(vgl. Münzwurf-Bsp. aus früherer Vorlesung)

$$\mathbb{P}[X=k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \text{binopdf}(k, n, p)$$ (MATLAB)

Binomialtest: Spermasexing

① H_0: $p = 0{,}7$

② H_A: $p > 0{,}7$

(will ich beweisen)

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} p \leq 0{,}7 & p = 0{,}99 & p = 0{,}7 & p = 0{,}7 \\ p > 0{,}7 & p > 0{,}99 & p > 0{,}7 & p < 0{,}7 \end{array}\right)$$

③ Teststatistik $X = \#\,♀$ bei $n = 12$ Versuche

④ Verteilung von X unter H_0

$$X \sim \mathrm{Bin}(\underset{n}{12};\ \underset{p}{0{,}7})$$

dies: X ist binomialverteilt mit Parametern n & p.

⑤ Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$

⑥ Verwerfungsbereich $K = ?$

so dass $\mathbb{P}_{H_0}[X \in K] \leq \alpha = 5\%$

und so groß wie möglich

$$\mathbb{P}_{H_0}[X=12] = \binom{12}{12}(0{,}7)^{12}(0{,}3)^{0} = 0{,}7^{12} \approx 1{,}38\%$$

$$\mathbb{P}_{H_0}[X=11] = \binom{12}{11}(0{,}7)^{11}(0{,}3)^{1} = 12 \cdot 0{,}7^{11} \cdot 0{,}3 \approx 7\%$$

$$\Rightarrow \quad K = \{12\}$$

⑦ $X = 11$ beobachtet

⑧ Testentscheid: H_0 wird nicht verworfen.

($\text{da } 11 \notin K$)

alternativ mit p-Wert

1 – 5 wie oben

~~6~~

7 wie oben

9 p-Wert $= \mathbb{P}_{H_0}[X \geq 11] \approx 8{,}5\%$

10 Testentscheidung: H_0 wird nicht verworfen.

da p-Wert $> \alpha$ $(8{,}5\% > 5\%)$

MATLAB

$\text{binocdf}(k,n,p) = \mathbb{P}[X \leq k]$

$\text{binopdf}(k,n,p) = \mathbb{P}[X = k]$