Vorzeichentest "Waage" (letzte Folie v. Vorl. 6)

① H_0: Waage geeicht

② H_A: Waage <u>nicht</u> geeicht

③ $T = \#\{\text{Messwert} < 20\,\text{kg}\}$ (in 10 Versuchen)

④ $T \sim \text{Bin}(10, \tfrac{1}{2})$

⑤ $\alpha = 5\%$

erst p-Wert

⑦ $T = 1$

⑨ $P[T \le 1] \cdot \overset{\text{beidseitiger Test}}{2} = \Big(\underbrace{\binom{10}{0}\left(\tfrac{1}{2}\right)^0\left(\tfrac{1}{2}\right)^{10}}_{P[T=0]} + \binom{10}{1}\left(\tfrac{1}{2}\right)^1\left(\tfrac{1}{2}\right)^9\Big) \cdot 2$

$$= (1 + 10)\left(\tfrac{1}{2}\right)^{10} \cdot 2 = \frac{11}{512} \approx 2\%$$

⑩ H_0 wird auf $\alpha = 5\%$ verworfen (da p-Wert $< \alpha$)

Erwartungswert für $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$

$$E[X] = \sum_{k=0}^{n} k \cdot P[X=k]$$

$$= \sum_{k=\cancel{0}\,1}^{n} \underbrace{k \cdot \binom{n}{k}} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= k \, \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} = n \, \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}$$

$$= n \binom{n-1}{k-1}$$

$$= n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^{k+1} (1-p)^{n-(k+1)}$$

$$= np \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{(n-1)-k}}_{\text{Wahrsch. für eine } \mathrm{Bin}(n-1,p)\text{-verteilte ZV}}}_{=1}$$

$$= np$$

Linearität von $E[\cdot]$

$$E[aX+bY] = \sum_{k,\ell} (ak+b\ell)\,P[X=k \text{ und } Y=\ell]$$

$$= a \sum_{k,\ell} k\,P[X=k \text{ und } \underbrace{Y=\ell}_{\text{egal}}] + b \sum_{k,\ell} \ell\,P[\underbrace{X=k}_{\text{egal}} \text{ und } Y=\ell]$$

$$= a \sum_{k} k\,P[X=k] + b \sum_{\ell} \ell\,P[Y=\ell]$$

$$= a\,E[X] + b\,E[Y]$$

Varianz

$$\mathrm{Var}(X) = E[(X - E[X])^2]$$

$$= E[X^2 - \underline{2E[X]} \cdot \underline{X} + E[X]^2]$$

Linearität

$$= E[X^2] - \underline{2E[X]}\, E[\underline{X}] + E[X]^2$$

$$= E[X^2] - E[X]^2$$

Erwartungstreue

① Mittelwert $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$, $x_i \to X_i$

$$E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] \underset{\text{Linearität}}{=} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{E[X_i]}_{\substack{\text{alle gleich} \\ = E[X]}} = E[X]$$

② empirische Varianz

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^2$$

$$= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 - \frac{2}{n} x_i \sum_{j=1}^{n} x_j + \frac{1}{n^2}\underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^2}_{= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_j x_k}\right)$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j + \underbrace{\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_j x_k}_{= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_j x_k}\right)$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\underbrace{\frac{x_i^2}{n}}_{\frac{1}{2}x_i^2+\frac{1}{2}x_j^2} - \frac{2\cdot 1}{2\cdot n}x_i x_j\right)\right) \leftarrow x_i \rightsquigarrow X_i$$

$$= \frac{1}{2n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i-x_j)^2$$

$$E\left[\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\underbrace{E[X_i^2]}_{\substack{\text{alle gleich}\\ =E[X^2]}} - \underbrace{E[X_iX_j]}\right]$$

da unabhängig (später)

$$= \begin{cases} E[X_i]\cdot E[X_j], & i\neq j \quad \leftarrow n^2-n \text{ mal} \\ E[X_i^2], & i=j \quad \leftarrow n \text{ mal} \end{cases}$$

$$= \frac{1}{n(n-1)}\left(\underbrace{n^2E[X^2] - \underset{\text{2. Zeile}}{nE[X^2]}}_{= n(n-1)E[X^2]} - \underset{\text{1. Zeile}}{n(n-1)E[X]\cdot E[X]}\right)$$

$$= E[X^2] - E[X]^2 = \mathrm{Var}(X)$$

Verteilungsfkt für X = Augenzahl beim fairen Würfeln