Zeigt Würfel mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ an ⚂?

Test mit Verwerfungsbereich

① $H_0: \omega = \frac{1}{6}$ (ω: Wahrsch. für ⚂)

② $H_0: \omega \neq \frac{1}{6}$

③ X = # ⚂ in 60 Würfen

④ $X \sim \mathrm{Bin}(60, \frac{1}{6})$

⑤ $\alpha = 5\%$

⑥ $60 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} < 9$ $\leadsto$ eher nicht mit Faustregel

$$\mathbb{P}[X \le k] = \sum_{l=0}^{k} \binom{60}{l} \left(\frac{1}{6}\right)^{l} \left(\frac{5}{6}\right)^{60-l} = \text{binomcdf}(k, 60, \tfrac{1}{6})$$

gesucht: k, so dass

$\mathbb{P}[X \le k]$ möglichst groß, aber $\le 2{,}5\%$ $(= \frac{\alpha}{2})$

binocdf(0:15, 60, 1/6)

5. Spalte: 0,0202, d.h. $P[X \leq 4] \approx 2{,}02\%$

d.h. $0, 1, 2, 3, 4 \in K$

binocdf(0:60, 60, 1/6)

17. Spalte: 0,9836, d.h. $P[X \leq 16] \approx 98{,}36\%$

$\Rightarrow P[X \geq 17] \approx 1{,}64\%$ (*)

$K = \{0, 1, 2, 3, 4, 17, 18, \ldots, 60\}$

7 $X_{\text{beobachtet}} = 6$

8 $X_{\text{beob.}} \notin K$ also wird H_0 nicht verworfen

(*) $\mathbb{P}[X \geq 16] = 1 - \mathbb{P}[X \leq 15]$

$$= 1 - \text{binocdf}(15, 60, 1/6)$$

$$\approx 3{,}38\,\% \quad > 2{,}5\,\%$$

daher keine 16 im Verwerfungsbereich K

Macht des Tests

Angenommen, wir haben einen Würfel, der mit Wahrsch. $w = \frac{1}{2}$ eine ⚂ zeigt. Wie groß ist die Wahrsch. dafür, dass unser Test erkennt, dass dieser Würfel <u>nicht</u> mit Wahrsch. $w = \frac{1}{6}$ eine ⚂ würfelt? Das ist die Macht des Tests für <u>diesen</u> Würfel.

1 2 $H_0: \omega = \frac{1}{6}$, $H_A = \omega = \frac{1}{2}$

$$P_{H_A}[X \leq 4] = \text{binocdf}(4, 60, 1/2) = 4{,}5 \cdot 10^{-13} \approx 0$$

$$P_{H_A}[X \geq 17] = 1 - P_{H_A}[X \leq 16]$$

$$= 1 - \text{binocdf}(16, 60, 1/2)$$

$$\approx 99{,}98\%$$

$$\underbrace{1-\beta}_{\text{Macht}} = P_{H_A}[X \in K] = P_{H_A}[X \leq 4] + P_{H_A}[X \geq 17]$$

$$\approx 99{,}98\%$$

Wie wär's für einen Würfel mit $\omega = \frac{1}{10}$?

$$P_{H_A}[X \leq 4] = \text{binomcdf}(4, 60, 1/10) \approx 27{,}1\%$$

$$P_{H_A}[X \geq 17] = 1 - P[X \leq 16]$$

$$= 1 - \text{binomcdf}(16, 60, 1/10)$$

$$\approx 5{,}6 \cdot 10^{-5}$$

$1-\beta \approx 27{,}1\%$ für dieser Würfel.