Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Sommersemester 2014

Mathematatik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 6 (Abgabe 15.05.2014)

Aufgabe 24 (10 Punkte)

a) Führen Sie die HAT für die Matrix B aus Aufgabe 22 durch, d.h. geben Sie eine unitäre (bzw. orthogonale) Matrix U mit zugehöriger Diagonalmatrix $D = \overline{U}^T BU$ an.

b) Berechnen Sie $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Cx}$ für $x \in \mathbb{R}$ und C aus Aufgabe 22.
Hinweis: Bringen Sie die Matix C mithilfe einer HAT in Diagonalform.

Aufgabe 25 (10 Zusatzpunkte)

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}, \qquad \phi \in \mathbb{R}\,.$$

b) Zeigen Sie: Ist $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitär, und ist λ ein Eigenwert von U, so folgt $|\lambda| = 1$.

Aufgabe 26 (10 Punkte)

Bestimmen Sie alle Eigenwerte von

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und führen Sie die HAT durch, d.h. geben Sie eine unitäre (bzw. orthogonale) Matrix U mit zugehöriger Diagonalmatrix $D = \overline{U}^T AU$ an.

Aufgabe 27 (Fibonacci-Zahlen) (10 Punkte)

Sei $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ und $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\ \forall\ n \geq 2$. Sei weiter

$$\vec{b}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}.$$

a) Finden Sie eine 2×2-Matrix A, so dass $\vec{b}_{n+1} = A\,\vec{b}_n$.

b) Berechnen Sie A^n (durch HAT) und bestimmen Sie damit $\vec{b}_n$ sowie a_n explizit. Vergleichen Sie mit Aufgabe 17 d aus dem WS 13/14.

Aufgabe 28 (10 Punkte)

Man nennt

$$\vec{y}' = A\vec{y}\,, \quad A \in \mathbb{C}^{n\times n}\,,$$

ein lineares Differentialgleichungssystem erster Ordung mit konstanten Koeffizienten. Dabei sind die Elemente von $\vec{y}$ Funktionen von x, und $\vec{y}'$ ist die komponentenweise Ableitung nach x, d.h.

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}\,, \quad \vec{y}' = \frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}x} = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{pmatrix}\,.$$

a) Zeigen Sie: Ist λ ein Eigenwert von A mit zugehörigem Eigenvektor $\vec{u}$, so ist

$$\vec{y}(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}\,\vec{u}$$

eine Lösung des DGL-Systems.

b) Zeigen Sie: Jedes $\vec{y}$ der Form

$$\vec{y}(x) = \mathrm{e}^{Ax}\,\vec{b}\,, \quad \vec{b} \in \mathbb{C}^n \text{ beliebig,}$$

ist eine Lösung des DGL-Systems. Welchen Wert nimmt $\vec{y}(0)$ an?

c) Lösen Sie das AWP $\vec{y}' = B\vec{y}$, $\vec{y}(0) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$, mit B aus Aufgabe 22.