Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Sommersemester 2014

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 7 (Abgabe am 22.05.2014)

Aufgabe 29 (10 Punkte)
Bringen Sie die quadratischen Formen in den folgenden Gleichungen auf Hauptachsen, geben Sie an, was für Kegelschnitte die Gleichungen beschreiben, und zeichnen Sie sie.

a) $\frac{3}{2}x^2 + 3xy + \frac{11}{2}y^2 = 1$
b) $11x_1^2 - 6x_1x_2 + 3x_2^2 = 2$
c) $4(x^2 - y^2) + 6xy = 5$
d) $9x_1^2 + 24x_1x_2 + 16x_2^2 = 25$

Aufgabe 30 (10 Punkte)

a) Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitesch mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Zeigen Sie: $\det A = \prod_{j=1}^{n} \lambda_j$.
b) Gegeben sei die quadratische Form ($\vec{x} = (x, y, z)^T$)

$$q_A(\vec{x}) = x^2 + 10y^2 + z^2 - 4y(x + z) + 2axz\,, \quad a \in \mathbb{R}\,.$$

Für welche Werte von a ist q_A positiv definit? Welche Definitheitseigenschaften hat q_A für andere Werte von a?

Aufgabe 31 (10 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & , \quad x^2 + y^2 > 0 \\ 0 & , \quad x = y = 0 \end{cases}\,.$$

a) Zeigen Sie: Die Funktion f ist stetig. Hinweis: $|xy| \leq x^2 + y^2$ (warum?)
b) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von f.
c) Berechnen Sie alle Richtungsableitungen von f in $\vec{0}$.
d) Ist f total differenzierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 32 (10 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(\vec{x}) = \mathrm{e}^{xy} + z^3 - xyz$, $\vec{x} = (x, y, z)^T$.

a) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen f_x, f_y und f_z.
b) Ist f total differenzierbar (mit Begründung)? Geben Sie ∇f an.
c) Bestimmen Sie die Richtungsableitung von f an der Stelle $\vec{x}_0 = \vec{0}$ in Richtung von $(1, 1, 1)^T$.
d) Bestimmen Sie die Richtungsableitung von f an der Stelle $\vec{x}_0 = (1, 1, 1)^T$ in Richtung von $(4, 0, 9)^T$.

Aufgabe 33 (10 Zusatzpunkte)

Schreiben Sie die DGL 2. Ordnung

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \tag{$*$}$$

um auf ein DGL-System 1. Ordnung. Definieren Sie dazu

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} ,$$

und suchen Sie eine Matrix A, so daß $\vec{y}\,' = A\vec{y}$ äquivalent zu $(*)$ wird. Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A und vergleichen Sie mit dem charakteristischen Polynom der DGL $(*)$.

Bemerkung: Das Umschreiben auf ein System funktioniert analog für DGLn beliebiger Ordnung (auch nichtlineare), sehen Sie wie?