Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 8 (Abgabe ausnahmsweise bis spätestens **Fr 30.5.14, 9:00 Uhr**, durch Einwurf in die **orange Mappe vor C6P43**)

Aufgabe 34 (10 Punkte)

a) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(\vec{x}) = \mathrm{e}^{xy} + z^3 - xyz$, $\vec{x} = (x, y, z)^T$. Berechnen Sie alle zweiten partiellen Ableitungen von f, d.h. f_{xx}, f_{xy}, f_{xz}, f_{yx}, f_{yy}, f_{yz}, f_{zx}, f_{zy} und f_{zz}.

b) Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$g(x,y) = \begin{cases} xy\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & , \quad x^2+y^2>0 \\ 0 & , \quad x=y=0 \end{cases}.$$

(i) Bestimmen Sie $g_x(0,0)$ und $g_y(0,0)$.
(ii) Berechnen Sie g_x und g_y für $(x,y) \neq (0,0)$.
(iii) Bestimmen Sie $g_{xy}(0,0)$ und $g_{yx}(0,0)$.

Aufgabe 35 (10 Punkte)

Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_{\mathfrak{K}} \vec{f}\,\mathrm{d}\vec{x}$ für $\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ y^2 \end{pmatrix}$ und die Wege

a) $\mathfrak{K}_3$: Die geradlinige Verbindung von $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ nach $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

b) $\mathfrak{K}_1 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, und

c) $\mathfrak{K}_2 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t^3) \\ \sin(t^3) \end{pmatrix}$, $t \in [0, \sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}]$

Geben Sie auch jeweils Anfangs- und Endpunkt des Integrationswegs an.
Ist f konservativ? Begründen Sie ihre Antwort.

Aufgabe 36 (10 Punkte)

Bestimmen Sie

$$\int_{\mathfrak{K}} \begin{pmatrix} y \\ x-z \\ 2z\,\mathrm{e}^{z^2} - y \end{pmatrix} \mathrm{d}\vec{x} \quad \text{für} \quad \mathfrak{K} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \sin(2\pi t) \\ \mathrm{e}^t \\ t^3 \end{pmatrix} , \; t \in [0,1] \,.$$

Aufgabe 37 (10 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Taylorreihe von $g(x,y) = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{1-y^2}$ um $(0,0)$.

b) Bestimmen Sie die Taylorentwicklungen im Ursprung bis einschließlich des quadratischen Terms von $f(x,y,z) = \mathrm{e}^{xy} + z^3 - xyz$ und $g(x,y) = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{1-y^2}$.

c) Bestimmen Sie die Taylorentwicklung um den Punkt $(0,-1,1)$ von

$$h(x,y,z) = z^3 - 3z^2 + x^2 + 4yx + 2y + 4z - 4 \,.$$

Hinweis: Sie müssen nicht ableiten.

Aufgabe 38 (10 Zusatzpunkte)

Sei $\vec{x} = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$ mit kartesischen Koordinaten x, y, z. Wir möchten uns die folgende Menge veranschaulichen,

$$T := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left(1 - \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + z^2 = \tfrac{1}{4} \right\} .$$

a) Zeichnen Sie zunächst die Schnittmengen mit den drei Koordinatenebenen, z.B. ist $T_{xy} := \{\vec{x} \in T \mid z = 0\}$ die Schnittmenge mit der xy-Ebene.

b) Zeichnen Sie nun $T \subset \mathbb{R}^3$.

c) Erklären Sie kurz, wie Sie von den Ergebnissen in (a) zu der Zeichnung in (b) gelangt sind.