Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Sommersemester 2014

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 10 (Abgabe ausnahmsweise bis spätestens **Fr 20.6.14, 9:00 Uhr**, durch Einwurf in die **orange Mappe vor C6P43**)

Aufgabe 43 (10 Punkte)
Für welche $(r, \vartheta, \varphi) \in \mathbb{R}^3$ ist die Funktion

$$f(r,\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} x(r,\vartheta,\varphi) \\ y(r,\vartheta,\varphi) \\ z(r,\vartheta,\varphi) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r\sin\vartheta\cos\varphi \\ r\sin\vartheta\sin\varphi \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

lokal umkehrbar?[3] Berechnen Sie auch ${f^{-1}}'(0,-2,0)$.

Aufgabe 44 (10 Punkte)
Bestimmen Sie das Maximum der Funktion $f(x,y,z) = xyz$ auf der Kugeloberfläche $x^2+y^2+z^2 = 3$. Wo wird das Maximum angenommen?

Aufgabe 45 (10 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) = \mathrm{e}^{-x^2-y^2-2x+2y}$.

a) Bestimmen Sie alle lokalen Extremstellen von f.
b) Bestimmen Sie alle potentiellen Extremstellen von f unter der Nebenbedingung $x^2+y^2 = 9$. Können Sie entscheiden, ob es sich tatsächlich um Minima oder Maxima handelt?
c) Sei $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 9\}$. Bestimmen Sie $\max\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$ und $\min\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$.

Hinweis: Denken Sie neben Satz 36 auch an Satz 27.

Aufgabe 46 (Wiederholung Kegelschnitte) (10 Zusatzpunkte)
Bringen Sie die quadratischen Formen in den folgenden Gleichungen auf Hauptachsen, geben Sie an, was für Kegelschnitte die Gleichungen beschreiben, und zeichnen Sie sie.

a) $4x^2+2xy+y^2 = 1$ b) $x^2-2xy-2y^2 = 1$

Sei $\vec{x}_1$ ein Punkt auf dem ersten und $\vec{x}_2$ ein Punkt auf dem zweiten Kegelschnitt. Geben Sie eine Lagrange-Funktion an, mit deren Hilfe man den minimalen Abstand der Punkte $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ bestimmen könnte. (Sie müssen das Minimum nicht berechnen.)

---

[3] Das heißt wo existiert eine Funktion $f^{-1}(x,y,z) = \begin{pmatrix} r(x,y,z) \\ \vartheta(x,y,z) \\ \varphi(x,yz) \end{pmatrix}$?