

## Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 11 (Abgabe am 26.06.2014)

---

### Aufgabe 48 (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Masse  $m$  des inhomogenen Einheitswürfels  $W = [0, 1]^3$  mit Dichte

$$f(x, y, z) = xy^2 e^{xyz} + z e^{xz},$$

d.h. berechnen Sie  $m := \int_W f \, dV$ .

### Aufgabe 49 (10 Punkte)

a) Bestimmen Sie das Volumen des Ellipsoids

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}^+.$$

b) Berechnen Sie das Volumen einer Kugelschale mit Innenradius  $R$  und Dicke  $d$ , d.h. berechnen Sie  $|K| = \int_K dV$  für

$$K := \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid R \leq |\vec{x}| \leq R + d \}.$$

Bestimmen Sie auch  $\lim_{d \rightarrow 0} \frac{|K|}{d}$  und interpretieren Sie das Ergebnis.

### Aufgabe 50 (Zylinderkoordinaten) (10 Punkte)

a) Berechnen Sie das Volumenelement  $dV$  in Zylinderkoordinaten  $(r, \varphi, z)$ , definiert durch

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}, \quad (x, y, z : \text{kartesisch}).$$

b) Bestimmen Sie das Volumen, das vom Graph der Funktion

$$f(x, y) = 9 - (x^2 + y^2)$$

und der  $xy$ -Ebene eingeschlossen wird.

c) Bestimmen Sie das Volumen von  $K = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq (1 - \frac{z}{2})^2, 0 \leq z \leq 2 \}$ , und zeichnen Sie  $K$ .

### Aufgabe 51 (10 Punkte)

Berechnen Sie das Volumen der folgenden Teilmenge von  $\mathbb{R}^3$ ,

$$\left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} = \begin{pmatrix} (1 + r \sin u) \cos v \\ (1 + r \sin u) \sin v \\ r \cos u \end{pmatrix}, 0 \leq r \leq \frac{1}{2}, 0 \leq u < 2\pi, 0 \leq v < 2\pi \right\}.$$

Was für ein Objekt wird durch diese Parametrisierung beschrieben?