Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Sommersemester 2014

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 12 (Abgabe am 03.07.2014)

Aufgabe 52 (10 Zusatzpunkte)

a) Sei $\lambda > 0$. Bestimmen Sie $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x^2} \mathrm{d}x$.
HINWEIS: Aus der Vorlesung wissen wir, dass $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.

b) Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$ und $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$. Berechnen Sie
$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\vec{x}^T D \vec{x}} \, \mathrm{d}V = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j^2} \, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n.$$

c) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ positiv definit. Bestimmen Sie $\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\vec{x}^T A \vec{x}} \, \mathrm{d}V$.
HINWEIS: Laut Satz 24 existiert eine orthogonale Matrix U, so dass $U^T A U$ diagonal ist. Die Transformation $\vec{y} = U^T \vec{x}$ bietet sich an.

Aufgabe 53 (10 Punkte)

Berechnen Sie die Oberfläche des Torus T aus den Aufgaben 38 und 51.

Aufgabe 54 (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Oberfläche des Sattels
$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leq 2\,,\ z = x^2 - y^2 \right\}$$
sowie den Fluss von $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{x}$ durch S.
HINWEIS: Ebene Polarkoordinaten, $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$, sind hilfreich.

Aufgabe 55 (10 Punkte)

Sei $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\} \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $\vec{x} \mapsto \dfrac{\vec{x}}{|\vec{x}|^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, und sei K die Kugel mit Radius R.

a) Bestimmen Sie $\displaystyle\int_{\partial K} \vec{f}\, d\vec{O}$ (ohne Verwendung eines Integralsatzes).

b) Berechnen Sie $\operatorname{div} \vec{f}$.

c) Bestimmen Sie $\displaystyle\int_K \operatorname{div} \vec{f}\, \mathrm{d}V$ für $\alpha < 3$.

d) Bilden Sie den Limes $\alpha \to 3$ für $\operatorname{div} \vec{f}$ und berechnen Sie damit das Integral aus c. Vergleichen Sie es mit dem Ergebnis aus a für $\alpha = 3$. Erklären Sie den scheinbaren Widerspruch.

Aufgabe 56 (10 Punkte)

Bestimmen Sie jeweils den Fluss (von innen nach außen) der Vektorfelder $\vec{v}_1(\vec{x}) = \vec{x}$ und $\vec{v}_2(\vec{x}) = (-y, x, 0)^T$ durch die Oberfläche des Torus T aus den Aufgaben 38, 51 und 53.