

## Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 13 (Abgabe bis spätestens 10.07.2014, 10:10 Uhr, durch Einwurf  
in die **orange Mappe vor C6P43**)

---

### Aufgabe 57

(10 Punkte)

Berechnen Sie  $\oint_{\mathfrak{K}} \vec{v} d\vec{x}$  für

$$\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} y + e^{-x^2} \\ \cos y + 3x \\ \tanh z \end{pmatrix};$$

dabei sei  $\mathfrak{K}$  der im Uhrzeigersinn durchlaufene Einheitskreis in der  $xy$ -Ebene.

### Aufgabe 58

(10 Punkte)

- a) Sei  $\Omega = \{m, a, t, h\}$ . Bestimmen Sie jeweils  $\mathcal{A}^\sigma(\mathcal{M}_j, \Omega)$  für  
 $\mathcal{M}_1 = \{\{m\}\}$ ,  $\mathcal{M}_2 = \{\{m\}, \{a\}\}$  und  $\mathcal{M}_3 = \{A \in \mathcal{P}(\Omega) \text{ mit } |A| = 2\}$ .
- b) Sei  $\Omega = \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{M}_1$  die Menge aller offenen Intervalle  $(a, b)$  aus  $\mathbb{R}$  sowie  
 $\mathcal{M}_2$  die Menge aller abgeschlossenen Intervalle  $[a, b]$  aus  $\mathbb{R}$ .  
Zeigen Sie: Die erzeugten  $\sigma$ -Algebren sind gleich<sup>4</sup>, d.h.  $\mathcal{A}^\sigma(\mathcal{M}_1, \Omega) = \mathcal{A}^\sigma(\mathcal{M}_2, \Omega)$ .

### Aufgabe 59

(10 Punkte)

- a) Nach dem Verpacken von sechs verschiedenen Geschenken kann Georg den Inhalt nicht mehr erkennen. Eines war für Klaus, zwei für Lothar und drei für Susanne. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei zufälliger Verteilung der Geschenke (in der richtigen Anzahl!) jeder die richtigen erhält?
- b) Wir zeigen: Sind die Ereignisse  $A_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  paarweise unabhängig, d.h.

$$P(A_j \cap A_k) = P(A_j) P(A_k) \quad \forall j \neq k$$

so folgt daraus **nicht**  $P\left(\bigcap_{j=1}^n A_j\right) = \prod_{j=1}^n P(A_j)$ .

BEISPIEL: Ein fairer Würfel werde zweimal geworfen. Wir betrachten die Ereignisse

$A_1 =$  "der erste Wurf liefert eine gerade Zahl",

$A_2 =$  "der zweite Wurf liefert eine ungerade Zahl" und

$A_3 =$  "die Summe der beiden Augenzahlen ist gerade".

Berechnen Sie die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.

---

<sup>4</sup>Es handelt sich nämlich in beiden Fällen um die Borel- $\sigma$ -Algebra über  $\mathbb{R}$ .

**Aufgabe 60**

(10 Punkte)

Eine Krankheit trete bei 1% der Bevölkerung auf (Prävalenz). Ein Labortest liefert bei 98% der Kranken ein positives Ergebnis (Sensitivität). Derselbe Test liefert bei 95% der Gesunden ein negatives Ergebnis (Spezifität). Wir möchten folgende Frage beantworten:

*Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit (einer zufällig getesteten Person), krank zu sein, wenn der Test positiv ist?*

Gehen Sie dazu wie folgt vor:

- a) Geben Sie wie beim Gefangenenparadoxon aus der Vorlesung eine geeignete Ergebnismenge  $\Omega$  an.

Bezeichnen Sie mit  $A_1$  das Ereignis, dass die untersuchte Person die Krankheit hat, mit  $A_2$  das Ereignis, dass die untersuchte Person die Krankheit nicht hat (also  $A_2 = A_1^C$ ) und mit  $B$  das Ereignis, dass der Test positiv ausfällt.

- b) Geben Sie alle Wahrscheinlichkeiten und alle bedingten Wahrscheinlichkeiten an, die sich unmittelbar aus dem Aufgabentext ergeben.
- c) Bestimmen Sie die gesuchte Wahrscheinlichkeit mithilfe des Satzes von Bayes.
- d) Geben Sie außerdem die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass der Test bei einer zufällig ausgewählten Person positiv ausfällt.

**Aufgabe 61**

(10 Zusatzpunkte)

Drei Schützen treffen sich zu einem Duell. Sie ordnen sich an den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks an und vereinbaren die folgenden Regeln: Den ersten Schuss hat  $A$ , dann  $B$ , dann  $C$ , dann wieder  $A$  und so weiter. Ist einer getroffen, so setzen die anderen beiden das Duell fort. Die Trefferwahrscheinlichkeit von  $A$  ist 0,3, die von  $B$  1,0 und die von  $C$  0,5. Jeder Schütze entscheidet, wenn er an der Reihe ist, selbst, wohin er den Schuss richtet – auf einen der Gegner oder in die Luft. Alle sind gute Mathematiker und treffen immer die Entscheidung, die ihnen maximale Überlebenschancen verspricht. Wohin richtet  $A$  seinen ersten Schuss? Wie hoch sind die Überlebenschancen für  $A$ ,  $B$  und  $C$ ?

**Aufgabe 62**

(18 Zusatzpunkte)

Üben Sie bis spätestens 13.07.14 auf [www.khanacademy.org](http://www.khanacademy.org) die Skills

- *Basic set notation,*
- *Probability space,*
- *Independent probability,*
- *Dependent probability,*
- *Permutations and combinations* und
- *Probability with permutations and combinations.*

Je *Skill*, für die Sie am Stichtag den Status *Practiced* oder *Level One* erreicht haben, erhalten Sie 2 Punkte. Für den Status *Level Two* oder *Mastered* schreiben wir 3 Punkte gut.