Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Sommersemester 2014

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Klausur am 22.07.2014

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. **Zeigen Sie auch stets Ihren Rechenweg!**

Es sind maximal 102 Punkte erreichbar, 84 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 42 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfsmittel: Ein handbeschriebenes Blatt (DIN A4).
Bearbeitungszeit: 120 Minuten. **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (4+8+8= 20 Punkte)

Sei $C_n := \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^{2n}(x)\,\mathrm{d}x$.

a) Berechnen Sie C_1. (Mit vollständigem Rechenweg!)

b) Zeigen Sie: $C_n = \dfrac{2n-1}{2n}\,C_{n-1}\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Hinweis: Partielle Integration.

Bestimmen Sie damit C_2 und C_3.

c) Berechnen Sie

$$\int_0^\infty \frac{x+5}{6(x+1)(x^2+3x+2)}\,\mathrm{d}x\,.$$

Hinweis: Partialbruchzerlegung.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Lösen Sie das Anfangswertproblem (AWP) $y'\,y - \sin x = 1$, $y(0) = -2$.

Aufgabe 3 (4+2+4 = 10 Punkte)

a) Bestimmen Sie alle Lösungen $y(x)$ von $y'' + 4y' + 4y = 0$.

b) Lösen Sie das AWP $y'' + 4y' + 4y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

c) Bestimmen Sie eine Lösung von $y'' + 4y' + 4y = \mathrm{e}^{-2x}$.

Aufgabe 4 (7+4+3 = 14 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 16 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

b) Geben Sie eine orthogonale Matrix U und eine Diagonalmatrix D an, so dass $D = U^T A\,U$.

c) Lösen Sie das AWP $\vec{y}'(x) = A\vec{y}(x)$, $\vec{y}(0) = (3\ 0\ 4)^T$.

Aufgabe 5 (10+4+4 = 18 Punkte)

Sei $f(x,y) = x^4 - 2x^2 + y^2$.

a) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f, d.h. alle (x,y) mit $(\nabla f)(x,y) = 0$. Untersuchen Sie, ob an diesen Stellen Minima, Maxima oder Sattelpunkte vorliegen.

b) Berechnen Sie

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Hinweis: $\int_0^{2\pi} \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \pi$, $\int_0^{2\pi} \cos^4 x\,\mathrm{d}x = 3\pi/4$.

c) Ist $f(x,y) = 8 + \pi^2$ in einer Umgebung von $(x_0, y_0) = (2, \pi)$ nach x auflösbar, definiert dort also eine Funktion $x = g(y)$? Bestimmen Sie ggf. auch $g'(\pi)$.

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_{\mathfrak{K}} \vec{f}\,\mathrm{d}\vec{x}$ für

$$\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathfrak{K}:\ \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \left(\tfrac{3}{2} + \cos(3t)\right)\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t < 2\pi\,.$$

Hinweis: $\int_0^{2\pi} \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \pi$.

Aufgabe 7 (6+4 = 10 Punkte)

Sei $\vec{x} = (x,y,z)^T$,

$$\mathcal{P} = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \vec{x} = r\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix},\ \begin{matrix} 0 \leq r \leq \cos^2\theta \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \phi < 2\pi \end{matrix} \right\} \quad \text{und} \quad \vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2x(y-1) \\ y - y^2 \\ \cos(x) - z \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie das Volumen von $\mathcal{P}$, d.h. $\int_{\mathcal{P}} \mathrm{d}V$

b) Bestimmen Sie den Fluss von $\vec{v}$ durch die Oberfläche von $\mathcal{P}$, d.h. $\int_{\partial\mathcal{P}} \vec{v}\cdot\vec{n}_a\,\mathrm{d}O$, wobei die Normale $\vec{n}_a$ nach außen zeige.

Aufgabe 8 (8 Punkte)

Berechnen Sie $\displaystyle\int_{\mathcal{F}} z\,\mathrm{d}O$ für die Fläche

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{matrix} z^2 = 1 + x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 \leq 4 \\ z \geq 0 \end{matrix} \right\}.$$

Aufgabe 9 (5+5 = 10 Punkte)

Anne und Bernd messen sich im Bogenschießen. Sie schießen abwechselnd auf ein 90m entferntes Ziel. Wer das Ziel zuerst trifft, hat das Wettschießen gewonnen. Anne ist die bessere Schützin, sie trifft das Ziel bei jedem Schuss mit einer Wahrscheinlichkeit von 70%. Bernd trifft lediglich mit Wahrscheinlichkeit 40%. Bernd darf beginnen.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Anne den Wettbewerb mit Ihrem zweiten Schuss beendet?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Bernd den Wettbewerb gewinnt?

Geben Sie die Ergebnisse als vollständig gekürzte Brüche an.