Universität Tübingen, Mathematisches Institut — Sommersemester 2014
Dr. Stefan Keppeler

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Nachklausur am 09.10.2014

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. **Zeigen Sie auch stets Ihren Rechenweg!**

Es sind maximal 108 Punkte erreichbar, 84 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 42 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfmittel: Ein beidseitig handbeschriebenes Blatt (DIN A4).
Bearbeitungszeit: 120 Minuten. **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (2+8+4+8= 22 Punkte)
Sei $J_n := \displaystyle\int_0^\infty x^n \, \mathrm{e}^{-x^2} \, \mathrm{d}x$.

a) Berechnen Sie J_1.

b) Zeigen Sie: $J_{n+2} = \dfrac{n+1}{2} J_n \ \forall \ n \in \mathbb{N}_0$. Hinweis: Partielle Integration.
Bestimmen Sie damit J_3 und J_5.

c) Bestimmen Sie J_0.
Hinweis: Berechnen Sie zunächst $(J_0)^2$, und denken Sie dabei an Polarkoordinaten.

d) Berechnen Sie
$$\int_{-\infty}^0 \frac{6-4x}{(x-1)(x^2-5x+6)} \, \mathrm{d}x \, .$$
Hinweis: Partialbruchzerlegung.

Aufgabe 2 (6 Punkte)
Lösen Sie das Anfangswertproblem (AWP) $y' = (\cos y - \mathrm{e}^y) \log x$, $y(1) = 0$.

Aufgabe 3 (4+2+4 = 10 Punkte)

a) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen $y(x)$ von $y'' + 4y' + 13y = 0$.

b) Lösen Sie das AWP $y'' + 4y' + 13y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

c) Bestimmen Sie eine Lösung von $y'' + 4y' + 13y = x$

Aufgabe 4 (7+4+3 = 14 Punkte)
Sei
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} .$$

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von A.
Hinweis: 3 ist Eigenwert von A.

b) Geben Sie eine orthogonale Matrix U und eine Diagonalmatrix D an, sodass gilt $D = U^T A\, U$.

c) Lösen Sie das AWP $\vec{y}\,'(x) = A\vec{y}(x)$, $\vec{y}(0) = (3\ 3\ 3)^T$.

Aufgabe 5 (6 Punkte)
Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ und $A\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$. Bestimmen Sie A.

Aufgabe 6 (10 Punkte)
Sei $f(x,y) = y\sin x$. Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f, d.h. alle (x,y) mit $(\nabla f)(x,y) = 0$. Untersuchen Sie, ob an diesen Stellen Minima, Maxima oder Sattelpunkte vorliegen.

Aufgabe 7 (10 Punkte)
Lassen sich die Gleichungen

$$\begin{aligned} x^3 + x\mathrm{e}^y + \sin z &= 0 \\ z^2 + y\cos x &= 0 \end{aligned}$$

in einer Umgebung von $(x_0, 0, 0)$ mit geeignetem x_0 nach (y,z) auflösen, d.h. definieren sie dort Funktionen $y(x)$ und $z(x)$? Bestimmen Sie ggf. auch $y'(x_0)$ und $z'(x_0)$.

Aufgabe 8 (8 Punkte)
Sei

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} x\\y\\z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \vec{x} = r\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} 0 \le r \le 1-\cos\theta \\ 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le \phi < 2\pi \end{matrix} \right\}.$$

Berechnen Sie das Volumen von $\mathcal{A}$, d.h. $\int_{\mathcal{A}} \mathrm{d}V$.

Aufgabe 9 (12 Punkte)
Sei $\vec{x} = (x\ y\ z)^T$,

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} x\\y\\z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{matrix} x^2+y^2-z^2 = 1 \\ 1 \le x^2+y^2 \le 4 \\ z \ge 0 \end{matrix} \right\} \qquad \text{und} \qquad \vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} xz \\ yz \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie $\int_{\mathcal{F}} z\,\mathrm{d}O$.
b) Berechnen Sie den Betrag des Flusses von $\vec{v}$ durch $\mathcal{F}$, d.h. $\left| \int_{\mathcal{F}} \vec{v} \cdot \overbrace{\vec{n}\,\mathrm{d}O}^{\mathrm{d}\vec{O}} \right|$.

Aufgabe 10 (5+5 = 10 Punkte)
Anne und Bernd messen sich im Bogenschießen. Sie schießen abwechselnd auf ein 90m entferntes Ziel. Wer das Ziel zuerst trifft, hat das Wettschießen gewonnen. Anne ist die bessere Schützin, sie trifft das Ziel bei jedem Schuss mit einer Wahrscheinlichkeit von 70%. Bernd trifft lediglich mit Wahrscheinlichkeit 40%. Bernd darf beginnen.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Bernd den Wettbewerb mit seinem dritten Schuss beendet?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Anne den Wettbewerb gewinnt?

Geben Sie die Ergebnisse als vollständig gekürzte Brüche an.