Stefan Teufel
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2014
23. Juni 2014

Mathematik für Physiker II

Übungsblatt 10

Aufgabe 47: Polarisierung (3 Punkte)

(a) Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein komplexer Skalarproduktraum. Zeigen Sie, dass für jeden Endomorphismus $T \in \mathcal{L}(V)$ die Polarisierungsgleichung gilt:

$$\begin{aligned}\langle u, Tv\rangle &= \tfrac{1}{4}\big(\langle u+v, T(u+v)\rangle - \langle u-v, T(u-v)\rangle \\ &\quad -\mathrm{i}\langle u+\mathrm{i}v, T(u+\mathrm{i}v)\rangle + \mathrm{i}\langle u-\mathrm{i}v, T(u-\mathrm{i}v)\rangle\big), \qquad \text{für alle } u,v \in V\,.\end{aligned}$$

(b) Folgern Sie, dass $T \in \mathcal{L}(V)$ genau dann selbstadjungiert ist, wenn $\langle u, Tu\rangle \in \mathbb{R}$ für alle $u \in V$.

Aufgabe 48: Matrizen (3 Punkte)

(a) Geben Sie eine Matrix an, die in $\mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$ liegt, aber nicht in $\mathrm{SU}(3)$.

(b) Geben Sie eine Matrix an, die in $\mathrm{O}(2)$ liegt, aber nicht in $\mathrm{SO}(2)$.

(c) Geben Sie eine Matrix an, die in $\mathrm{U}(3)$ liegt, aber weder in $\mathrm{O}(3)$ noch in $\mathrm{SU}(3)$.

Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

Aufgabe 49: Drehbewegungen (3 Punkte)

Betrachten Sie einen starren Körper, bei dem ein Punkt im Ursprung des Koordinatensystems festgehalten wird. Die Bahn eines Punkts in dem Körper mit Ortsvektor x_0 zur Zeit $t = 0$ wird durch $x(t) = D(t)x_0$ mit $D(t) \in \mathrm{SO}(3)$ beschrieben. Wir definieren nun die Zeitableitung $\dot{D}(t)$ der Matrix $D(t)$ komponentenweise. Dann folgt $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ mit $A(t) = \dot{D}(t)D^{-1}(t)$.

(a) Zeigen Sie, dass $A(t)$ schiefsymmetrisch ist, d.h. $A^T(t) = -A(t)$.

(b) Sei S der Vektorraum der schiefsymmetrischen 3×3-Matrizen. Zeigen Sie, dass es einen Isomorphismus $L : \mathbb{R}^3 \to S$ gibt, so dass $L(u)v = u \times v$, für alle $v \in \mathbb{R}^3$.

(c) Folgern Sie daraus, dass es ein $\omega(t) \in \mathbb{R}^3$ gibt, so dass $\dot{x}(t) = \omega(t) \times x(t)$.

Aufgabe 50: Lorentztransformationen und die Minkowskimetrik (3 Punkte)

In Aufgabe 24 wurde die Gruppe $\mathrm{SO}(1,1)$ der Lorentztransformationen definiert: für $\xi \in \mathbb{R}$ ist $A_\xi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$A_\xi = \begin{pmatrix} \cosh(\xi) & \sinh(\xi) \\ \sinh(\xi) & \cosh(\xi) \end{pmatrix}\,.$$

Wir führen nun auf dem $\mathbb{R}^2$, dessen Elemente wir mit $u = \binom{t}{x}$ bezeichnen, die symmetrische Bilinearform

$$\langle\!\langle u_1, u_2 \rangle\!\rangle := t_1 t_2 - x_1 x_2$$

ein.

(a) Zeigen oder widerlegen Sie: die sogenannte Minkowskimetrik $\langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle$ definiert ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$.

(b) Zeigen Sie, dass die Minkowskimetrik, invariant unter Lorentztransformationen ist, d.h., dass

$$\langle\!\langle A_\xi u_1, A_\xi u_2 \rangle\!\rangle = \langle\!\langle u_1, u_2 \rangle\!\rangle$$

für alle $A_\xi \in \mathrm{SO}(1,1)$ und $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^2$.

(c) Wie hängt der Parameter ξ (die Rapidität) mit der Geschwindigkeit v eines Lorentz-Boosts zusammen?

Aufgabe 51: Isometrieen des euklidischen Raumes (4 Zusatzpunkte)

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein reeller Skalarproduktraum und $F : V \to V$ eine (nicht notwendigerweise lineare) längentreue Abbildung, d.h.

$$\|F(u) - F(v)\| = \|u - v\|, \qquad \text{für alle } u, v \in V.$$

Zeigen Sie, dass es eine lineare Isometrie T von V gibt mit

$$F(u) = F(0) + Tu, \qquad \text{für alle } u \in V.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $f : V \to V$, $u \mapsto f(u) = F(u) - F(0)$ isometrisch und linear ist. Verwenden Sie die Parallelogrammgleichung und die Polarisationsidentität um nacheinander folgende Schritte zu zeigen: $\|f(u)\| = \|u\|$, $\|f(u) - f(v)\| = \|u - v\|$, $f(-v) = -f(v)$, $\|f(u) + f(v)\| = \|u + v\|$, $\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle$, $f(u + v) = f(u) + f(v)$, $f(\alpha u) = \alpha f(u)$.

Abgabe: Bis spätestens 10.00 Uhr am Montag den 30.06.2014 im Briefkasten von Herrn Teufel (Gebäude C, Raum links vom Eingang in Ebene 3) oder vor Beginn der Vorlesung bis 10.15 Uhr im Hörsaal N2.