Stefan Teufel
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2014
30. Juni 2014

Mathematik für Physiker II

Übungsblatt 11

Aufgabe 52: Diagonalisieren (4 Punkte)

Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $S \in \mathrm{O}(3)$ die

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

diagonalisiert, also

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

erfüllt. Wieviele verschiedene solcher Matrizen S gibt es?

Aufgabe 53: Exponential schiefsymmetrischer Matrizen (4 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{R}^3$ normiert, also $\|n\| = 1$, und $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ der Vektor der Paulimatrizen aus Aufgabe 44. Zeigen Sie, dass

$$\exp(\mathrm{i}\alpha(n \cdot \sigma)) = \cos(\alpha)E_2 + \mathrm{i}(n \cdot \sigma)\sin(\alpha).$$

Folgern Sie daraus, dass $\exp(\mathrm{i}\,\mathfrak{su}(2)) \subset \mathrm{SU}(2)$ ist.

Hinweis: Verwenden Sie die Beziehungen aus Aufgabe 44 und die Reihendarstellung der Exponentialfunktion.

Aufgabe 54: Kegelschnitte (4 Punkte)

Es sei A eine reelle, reguläre, symmetrische $n \times n$-Matrix, $b \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass sich die Gleichung

$$\langle x, Ax\rangle + \langle b, x\rangle = c$$

durch eine Koordinatentransformation der Form $x' = \alpha x + \beta$, $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}^n$, zu $\langle x', Ax'\rangle = 1$ umformen lässt, falls $c + \frac{1}{4}\langle b, A^{-1}b\rangle > 0$.
Betrachten Sie nun die Gleichung

$$5x_1^2 - 26x_1x_2 + 5x_2^2 + 10x_1 - 26x_2 = 31.$$

Bringen Sie die Gleichung zunächst in die Form $\langle x', Ax'\rangle = 1$, diagonalisieren Sie anschließend A um die Art des Kegelschnitts zu bestimmen. Fertigen Sie eine Skizze des Kegelschnitts in den *ursprünglichen* Koordinaten an.

Aufgabe 55: Rayleigh-Prinzip (2 Punkte)

Sei V ein n-dimensionaler Skalarproduktraum und Q eine quadratische Form, also $Q(u) = \langle u, Tu\rangle$ mit einem symmetrischen Operator T. Seien die Eigenwerte von T der Größe nach angeordnet $\lambda_1 < \cdots < \lambda_m$. Zeigen Sie, dass

$$\lambda_1 = \min\{Q(u) \,|\, \|u\| = 1\} \quad \text{und} \quad \lambda_m = \max\{Q(u) \,|\, \|u\| = 1\}\,.$$

Aufgabe 56: Spektraldarstellung (3 Punkte)

Bestimmen Sie die Spektraldarstellung der selbstadjungierten Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3\mathrm{i} \\ 0 & -3 & 0 \\ -3\mathrm{i} & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

d.h. schreiben Sie A in der Form

$$A = \sum_{j=1}^{3} \lambda_j P_j$$

mit den Eigenwerten λ_j und zugehörigen Spektralprojektionen P_j.

Abgabe: Bis spätestens 10.00 Uhr am Montag den 07.07.2014 im Briefkasten von Herrn Teufel (Gebäude C, Raum links vom Eingang in Ebene 3) oder vor Beginn der Vorlesung bis 10.15 Uhr im Hörsaal N2.