

## MATHEMATIK FÜR PHYSIKER II

### Übungsblatt 12

#### Aufgabe 57: Äquivalenzrelationen (3 Punkte)

Welche der folgenden Relationen  $\sim$  sind Äquivalenzrelationen (mit Begründung)?

- (a) Für Matrizen  $A, B \in M(n, \mathbb{K})$  und  $n > 1$  sei  $A \sim B \Leftrightarrow AB = BA$ .
- (b) Sei  $M$  eine nichtleere Menge von Vektorräumen. Für  $U, V \in M$  setze  $U \sim V$ , falls es einen Isomorphismus  $\Phi : U \rightarrow V$  gibt.
- (c) Für Zahlen  $a, b \in \mathbb{R}$ , setze  $a \sim b \Leftrightarrow a \geq b$ .

#### Aufgabe 58: Jordansche Normalform 1 (2 Punkte)

Sei  $A \in M(6, \mathbb{C})$  mit charakteristischem Polynom  $(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)^4$ . Die geometrischen Vielfachheiten von  $\lambda_1 = 1$  und  $\lambda_2 = -1$  seien jeweils 2. Bestimmen Sie alle möglichen Jordanschen Normalformen von  $A$ .

#### Aufgabe 59: Jordansche Normalform 2 (4 Punkte)

Bestimmen Sie eine Jordan-Normalform der Matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie ebenfalls die zugehörige Transformationsmatrix.

#### Aufgabe 60: Spur und Determinante auf direkten Summen (4 Zusatzpunkte)

Sei der endlichdimensionale Vektorraum  $V$  direkte Summe der Unterräume  $U_j$ ,

$$V = \bigoplus_{j=1}^n U_j$$

und  $L \in \mathcal{L}(V)$  direkte Summe der Endomorphismen  $L_j \in \mathcal{L}(U_j)$ , also

$$Lv = \sum_{j=1}^n L_j u_j,$$

für  $v = \sum_j u_j$  mit  $u_j \in U_j$ . Zeigen Sie, dass

$$\text{Spur}(L) = \sum_{j=1}^n \text{Spur}(L_j) \quad \text{und} \quad \det(L) = \prod_{j=1}^n \det(L_j).$$

**Aufgabe 61: Die Formel**  $\det(\exp(A)) = \exp(\text{Spur}(A))$  (4 Zusatzpunkte)

Sei  $A \in M(n, \mathbb{C})$  beliebig und  $S \in M(n, \mathbb{C})$  invertierbar. Zeigen Sie zunächst, dass

- $S^{-1}e^A S = e^{S^{-1}AS}$  und
- $\text{Spur}(S^{-1}AS) = \text{Spur}(A)$

gilt. Zeigen Sie nun die Formel

$$\det(e^A) = e^{\text{Spur } A}$$

unter Verwendung der Jordanschen Normalform.

*Tipp: Zeigen Sie die Formel zunächst für ein Jordankästchen und verwenden Sie dann Aufgabe 60.*

**Abgabe:** Bis spätestens 10.00 Uhr am Montag den 14.07.2014 im Briefkasten von Herrn Teufel (Gebäude C, Raum links vom Eingang in Ebene 3) oder vor Beginn der Vorlesung bis 10.15 Uhr im Hörsaal N2.