Stefan Teufel
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2014
14. Juli 2014

Mathematik für Physiker II

Übungsblatt 13

Aufgabe 62: Äquivalenz von Normen

(a) Sei $x \in \mathbb{R}^n$. Durch

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

wird für $1 \leq p < \infty$ eine Norm definiert. Weiter setzen wir

$$\|x\|_\infty := \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|.$$

Zeigen Sie die Äquivalenz der Normen $\|\cdot\|_p$ und $\|\cdot\|_q$ für $1 \leq p, q \leq \infty$.

(b) Zeichnen Sie für den $\mathbb{R}^2$ jeweils den "Einheitskreis" der Normen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_\infty$, also jeweils die Menge $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_\bullet = 1\}$.

Aufgabe 63: Metriken auf $\mathbb{R}$

(a) Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ streng monoton. Zeigen Sie, dass durch $g(x, y) := |g(x) - g(y)|$ eine Metrik auf $\mathbb{R}$ definiert wird.

(b) Finden Sie eine Metrik auf $\mathbb{R}$, die nicht durch eine Norm induziert wird.

(c) Finden Sie eine Metrik d auf $\mathbb{R}$, so dass $(\mathbb{R}, d)$ nicht vollständig ist.
Hinweis: Konstrueiren Sie eine Metrik, bzgl. derer $x_n = n$ eine Cauchy-Folge ist.

Aufgabe 64: Metrische Räume

Sei (X, d) ein metrischer Raum.

(a) Zeigen Sie, dass folgende Definition von Folgenkonvergenz äquivalent ist zur Definition wie sie in der Vorlesung gegeben wurde:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall \epsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} \;\; \forall n > N : \; d(x_n, a) < \epsilon.$$

(b) Beweisen Sie die umgekehrte Dreiecksungleichung

$$|d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z).$$

Aufgabe 65: Inneres und Rand

Zeigen Sie ausgehend von Definition 1.18 im Skript:

(a) $\mathring{Y}$ ist die Menge der inneren Punkte von Y.

(b) Ein Punkt $x \in X$ ist genau dann Randpunkt von $Y \subset X$, falls jede Umgebung von x sowohl einen Punkt aus Y als auch einen Punkt aus $X \backslash Y$ enthält.

(c) Bestimmen Sie das Innere und den Rand von

$$M := [0, 1] \backslash \left\{ \tfrac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Hinweis: Dieses Übungsblatt muss nicht mehr abgegeben werden. Es wird in der ersten Woche des kommenden Semesters im Rahmen der Übungen zu Mathematik für Physiker 3 besprochen!