Stefan Teufel
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2014
14. April 2014

Mathematik für Physiker II

Übungsblatt 2

Aufgabe 5: Linear unabhängige Funktionen (2 Punkte)
Gegeben seien die drei Funktionen $f, g, h : (0, 1) \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = 2x, \quad g(x) = 3\ln(x), \quad h(x) = 4\ln(xe^x).$$

Sind diese als Elemente des Vektorraums $\mathbb{R}^{(0,1)}$ der Abbildungen von $(0, 1)$ nach $\mathbb{R}$ linear unabhängig?

Aufgabe 6: Basen (4 Punkte)

(a) Gegeben sei der Unterraum $U := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 = x_3\} \subset \mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie eine Basis von U.

(b) Es sei $P^{(4)}_{\mathbb{R}}$ der Vektorraum der Polynome vom Grade höchsten 4. Es seien $q_i \in P^{(4)}_{\mathbb{R}}$ gegeben durch $q_1(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, $q_2(x) = x^3$ und $q_3(x) = x - 1$. Ergänzen Sie (q_1, q_2, q_3) zu einer Basis von $P^{(4)}_{\mathbb{R}}$.

Aufgabe 7: Direkte Summe von Vektorräumen (2 Punkte)

Seien zwei Vektorräume V und W über $\mathbb{K}$ gegeben, mit $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$. Das kartesische Produkt $V \times W$ wird durch die Verknüpfungen

$$(v_1, w_1) + (v_2, w_2) := (v_1 + v_2, w_1 + w_2)\,, \quad \lambda \cdot (v, w) := (\lambda v, \lambda w)$$

ebenfalls zu einem $\mathbb{K}$-Vektorraum, der die direkte Summe $V \oplus W$ heißt.
Zeigen Sie, dass $\dim(V \oplus W) = n + m$ gilt.

Aufgabe 8: Dimension von Unterräumen (3 Punkte)

Sei $U \subset V$ ein Unterraum. Zeigen Sie, dass $\dim(U) \leq \dim(V)$. Zeigen Sie weiterhin, dass im Falle $\dim(V) < \infty$

$$\dim(V) = \dim(U) \quad \Leftrightarrow \quad V = U$$

gilt.

Aufgabe 9: Dimensionsformel für Unterräume (3 Punkte)

Gegeben seien zwei Unterräume $U_1, U_2 \subset V$ und eine Basis $(v_1, \ldots, v_r)$ von $U_1 \cap U_2$. Da $U_1 \cap U_2$ auch ein Unterraum von U_1 bzw. U_2 ist, können wir diese Basis jeweils ergänzen zu einer Basis $(v_1, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_s)$ von U_1 bzw. zu einer Basis $(v_1, \ldots, v_r, z_1, \ldots, z_t)$ von U_2. Zeigen Sie, dass dann $(v_1, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_s, z_1, \ldots, z_t)$ eine Basis von $U_1 + U_2$ ist.

Abgabe: Bis spätestens 10.00 Uhr am Montag den 28.04.2014 im Briefkasten von Herrn Teufel (Gebäude C, Raum links vom Eingang in Ebene 3) oder zu Beginn der Vorlesung bis 10.15 Uhr im Hörsaal N2.