Stefan Teufel
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2014
28. April 2014

Mathematik für Physiker II

Übungsblatt 3

Aufgabe 10: Komposition linearer Abbildungen (1 Punkt)

Es seien U, V, W Vektorräume über dem Körper $\mathbb{K}$ und $T : U \to V$ sowie $S : V \to W$ lineare Abbildungen. Zeigen Sie, dass die Abbildung $S \circ T : U \to W$ linear ist.

Aufgabe 11: Bild und Kern (8 Punkte)

Bestimmen Sie für die folgenden linearen Abbildungen jeweils $\mathrm{Kern}(L_j)$, $\mathrm{Bild}(L_j)$, $\dim(\mathrm{Kern}(L_j))$ und $\dim(\mathrm{Bild}(L_j))$.

(a) $L_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto a \times x$, d.h. das Kreuzprodukt mit einem festen Vektor $a \in \mathbb{R}^3$.
Zur Erinnerung: $(a_1, a_2, a_3) \times (x_1, x_2, x_3) := (a_2x_3 - a_3x_2, a_3x_1 - a_1x_3, a_1x_2 - a_2x_1)$.

(b) $L_2 : P_{\mathbb{R}}^{(3)} \to \mathbb{R}$, $p \mapsto \int_{-1}^{1} p(x)\,\mathrm{d}x$.

(c) $L_3 : C^1(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$, $f \mapsto f'$.

(d) $L_4 : V \oplus V \to V$, $(v, w) \mapsto v - w$, wobei $\dim(V) = n$ sei.

Aufgabe 12: Lineare Abbildungen auf $P_{\mathbb{R}}$ (4 Punkte)

(a) Gibt es eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^3 \to P_{\mathbb{R}}^{(2)}$ mit $L(1, 2, 3) = x^2 - 1$, $L(0, 2, 1) = 3x + 4$, $L(-1, 0, -2) = x^2 + x + 1$?

(b) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung des Ableitungsoperators $\mathrm{D} : P_{\mathbb{R}}^{(4)} \to P_{\mathbb{R}}^{(4)}$, $p \mapsto p'$ bezüglich der Monombasis.

Aufgabe 13: Projektionen (6 Punkte)

Sei V ein Vektorraum und $P : V \to V$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) P ist idempotent, d.h. $P \circ P = P$.

(ii) Die Einschränkung von P auf $U := \mathrm{Bild}(P)$ ist die Identität, d.h. $P|_U = \mathrm{Id}_U$.

(iii) Es existieren Unterräume $U, W \subset V$, so dass $U + W = V$ und $P(u + w) = u$ für alle $u \in U$ und $w \in W$.

Ist eine dieser Eigenschaften (und damit alle) erfüllt, so heißt P eine Projektion.

Tipp: Zeigen Sie z.B. die Implikationen (i)$\Rightarrow$(ii), (ii)$\Rightarrow$(iii) und (iii)$\Rightarrow$(i).

Aufgabe 14: Drehmatrizen im $\mathbb{R}^3$ (4 Punkte)

Wir betrachten im $\mathbb{R}^3$ die Drehungen X_i, $i = 1, 2, 3$ um $\pi/2$ im positiven Drehsinn um die x_i-Achse (bei rechtshändiger Anordnung der Achsen). Bestimmen Sie die zugehörigen Matrizen bzgl. der kanonischen Basis sowohl für X_i als auch für X_i^{-1}. Bestimmen Sie durch geometrische Betrachtungen $X_1^{-1}X_2X_1$ und überprüfen Sie Ihr Ergebnis indem Sie die Matrixmultiplikation ausführen.

Abgabe: Bis spätestens 10.00 Uhr am Montag den 05.05.2014 im Briefkasten von Herrn Teufel (Gebäude C, Raum links vom Eingang in Ebene 3) oder vor Beginn der Vorlesung bis 10.15 Uhr im Hörsaal N2.