Stefan Teufel
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2014
5. Mai 2014

Mathematik für Physiker II

Übungsblatt 4

Aufgabe 15: Isomorphismen (2 Punkte)

Seien V, W Vektorräume und $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis von V. Zeigen Sie, dass die lineare Abbildung $L : V \to W$ genau dann ein Isomorphismus ist, wenn $(Lv_1, ..., Lv_n)$ eine Basis von W ist.

Aufgabe 16: Die Lie-Algebra der $n \times n$-Matrizen (3 Punkte)

Wir betrachten den Vektorraum $M(n, \mathbb{K})$ der $n \times n$-Matrizen. Zeigen Sie, dass dieser durch die Verknüpfung $[\,\cdot\,,\cdot\,] : M(n, \mathbb{K}) \times M(n, \mathbb{K}) \to M(n, \mathbb{K})$, $(A, B) \mapsto [A, B] := AB - BA$ zu einer Lie-Algebra wird, d.h. für alle $A, B, C \in M(n, \mathbb{K})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ gilt:

(i) $[\,\cdot\,,\cdot\,]$ ist bilinear, d.h. $[\alpha A+\beta B, C] = \alpha[A, C]+\beta[B, C]$ und $[A, \alpha B+\beta C] = \alpha[A, B]+\beta[A, C]$,

(ii) $[A, A] = 0$,

(iii) und es gilt die Jakobi-Identität $[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0$.

Aufgabe 17: Basiswechsel (4 Punkte)

(a) Seien $a, b \in \mathbb{R}^2$ linear unabhängig. Wir betrachten die lineare Abbildung $P_{a,b} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die $v = \alpha a + \beta b$ auf

$$P_{a,b}v = \alpha a$$

abbildet. Was ist die geometrische Bedeutung dieser Abbildung? Bestimmen Sie die Matrix zu $P_{a,b}$ bezüglich der Basis $\mathcal{A} = (a, b)$ und bezüglich der kanonischen Basis $\mathcal{K} = (e_1, e_2)$.

(b) Es seien die Basen $\mathcal{A} = \big((1 + \mathrm{i}, 1 - \mathrm{i}), (1 + 2\mathrm{i}, -1)\big)$ und $\mathcal{B} = \big((2 + 2\mathrm{i}, 2 - 2\mathrm{i}), (1 + \mathrm{i}, -2)\big)$ des Vektrorraums $\mathbb{C}^2$ gegeben. Dabei sind $(1 + \mathrm{i}, 1 - \mathrm{i})$ etc. die Darstellungen der Basisvektoren bezüglich der kanonischen Basis. Berechnen Sie die zugehörige Transformationsmatrix.

Aufgabe 18: Der Rang bei Kompositionen (4 Punkte)

Sei $A \in M(l \times m, \mathbb{K})$ und $B \in M(m \times n, \mathbb{K})$. Zeigen Sie, dass dann

$$\operatorname{rang}(A) + \operatorname{rang}(B) - m \leq \operatorname{rang}(AB) \leq \min\{\operatorname{rang}(A), \operatorname{rang}(B)\}$$

gilt. Unter welcher Bedingung gilt jeweils Gleichheit?

Hinweis: Betrachten Sie die Matrizen als lineare Abbildungen und verwenden Sie die Dimensionsformel für $\tilde{A} := A|_{\mathrm{Bild}(B)}$.

Aufgabe 19: Zeilenstufenform (3 Punkte)

Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrix, indem Sie sie auf Zeilenstufenform bringen.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & -1 & 3 \\ 6 & 1 & -1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Abgabe: Bis spätestens 10.00 Uhr am Montag den 12.05.2014 im Briefkasten von Herrn Teufel (Gebäude C, Raum links vom Eingang in Ebene 3) oder vor Beginn der Vorlesung bis 10.15 Uhr im Hörsaal N2.