Stefan Teufel
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2014
12. Mai 2014

Mathematik für Physiker II

Übungsblatt 5

Aufgabe 20: Matrizen invertieren (4 Punkte)

Invertieren Sie die folgenden Matrizen. Geben Sie explizit an, für welche Werte des Parameters $\lambda \in \mathbb{C}$ dies möglich ist.

$$\text{(a)} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)} \quad B = \begin{pmatrix} \mathrm{i}\lambda & -1 & \mathrm{i}\lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \mathrm{i} & \lambda \end{pmatrix}$$

Aufgabe 21: Ein lineares Gleichungssystem (2 Punkte)

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des linearen Gleichungssytems $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 9 \\ -1 & -4 & 2 & 11 \\ -2 & -8 & 0 & 6 \\ -3 & -12 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 22: Keplersche Fassregel (2 Punkte)

Johannes Kepler gab 1615 in seiner *Nova steriometria* eine Formel für den Inhalt von Weinfässern an, die auf folgender Näherungsmethode beruht: Zur näherungsweisen Berechnung von $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ betrachten wir die Stützstellen $x_0 = a$, $x_1 = (a+b)/2$ und $x_2 = b$ und setzen $y_k = f(x_k)$ für $k = 0, 1, 2$. Bestimmen Sie das zugehörige Interpolationspolynom p und zeigen Sie

$$\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Aufgabe 23: Methode der kleinsten Quadrate (2 Punkte)

Bestimmen Sie mit der Methode der kleinsten Quadrate die Ausgleichsgerade durch die folgenden Punkte im $\mathbb{R}^2$: $(0,2), (3,8), (4,9), (1,5)$.

Aufgabe 24: Matrixgruppen (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Menge der Automorphismen $L : V \to V$ mit der Komposition von Abbildungen eine Gruppe bildet. Diese Gruppe heißt $\mathrm{GL}(V)$. Für $V = \mathbb{R}^n$ bzw. $V = \mathbb{C}^n$ schreibt man stattdessen auch $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ bzw. $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$.

Wir betrachten nun für $\xi \in \mathbb{R}$ die Lorentztransformationen (der Einfachheit halber in $1+1$ Dimensionen) $A_\xi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$A_\xi = \begin{pmatrix} \cosh(\xi) & \sinh(\xi) \\ \sinh(\xi) & \cosh(\xi) \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $A_\xi A_{\xi'} = A_{\xi+\xi'}$ und folgern Sie daraus, dass $\mathrm{SO}(1,1) := \{A_\xi \,|\, \xi \in \mathbb{R}\}$ eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ ist. Zeigen Sie, dass auch

$$\mathrm{SO}(2) := \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha \in [0, 2\pi) \right\}$$

eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ ist.

Zur Erinnerung: G zusammen mit der Verknüpfung $\circ : G \times G \to G$ heißt Gruppe, falls gilt:

- *Für alle $f, g, h \in G$ gilt $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.*
- *Es existiert ein Element $e \in G$, sodass gilt $e \circ g = g$ für alle $g \in G$.*
- *Zu jedem $g \in G$ existiert ein Element g^{-1} mit $g \circ g^{-1} = e$.*

$H \subset G$ heißt Untergruppe, falls aus $h, g \in H$ folgt, dass auch $h \circ g \in H$ und $h^{-1} \in H$.

Aufgabe 25: Kubische Splineinterpolation* (4 Zusatzpunkte)

(a) Bei der Berechnung von Interpolationspolynomen mittels der in der Vorlesung vorgestellten Methode tritt das Problem auf, dass die so berechneten Polynome nicht unbedingt eine gute Annäherung an die vorgegebene Funktion f liefern, selbst wenn f stetig ist. (Machen Sie sich an einem Beispiel klar, was hier gemeint ist.) In der Praxis greift man daher häufig auf Spline-Interpolation zurück. Sei also $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$, $y_i := f(x_i)$. Ein natürlicher kubischer Spline $S : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist nun folgendermaßen definiert. Auf jedem Intervall gibt man sich ein Polynom dritten Grades vor, $s_i : [x_{i-1}, x_i] \to \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$, das folgenden Bedingungen genügen muss:

$$\begin{aligned} s_i(x_{i-1}) &= y_{i-1} \\ s_i(x_i) &= y_i \\ s_i'(x_i) &= s_{i+1}'(x_i) \\ s_i''(x_i) &= s_{i+1}''(x_i) \\ s_1''(x_0) = s_n''(x_n) &= 0 \end{aligned}$$

Definieren Sie $h_i := x_i - x_{i-1}$ und machen Sie den Ansatz

$$s_i(x) = \frac{\alpha_i (x - x_{i-1})^3 + \alpha_{i-1}(x_i - x)^3}{6h_i} + \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}\alpha_i\right)(x - x_{i-1}) + \left(\frac{y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}\alpha_{i-1}\right)(x_i - x)$$

mit zunächst unbekannten Koeffizienten $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \ldots, n$. Welche der obigen Gleichungen sind nun automatisch erfüllt? Formulieren Sie die übrigen Bedingungen als lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten α_i und zeigen Sie, dass dieses eindeutig lösbar ist.

(b) Approximieren Sie die Funktion $f(x) = \frac{10}{1+x^2}$ mit den Stützstellen $x = 0, \pm 1, \pm 2$ durch kubische Splines.

(c) Berechnen Sie zum Vergleich das Interpolationspolynom vom Grad 4 an den vorgegebenen Stützstellen und plotten Sie alle drei Funktionen in ein Diagramm.

Abgabe: Bis spätestens 10.00 Uhr am Montag den 19.05.2014 im Briefkasten von Herrn Teufel (Gebäude C, Raum links vom Eingang in Ebene 3) oder vor Beginn der Vorlesung bis 10.15 Uhr im Hörsaal N2.