Stefan Teufel
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2014
19. Mai 2014

Mathematik für Physiker II

Übungsblatt 6

Aufgabe 26: Determinanten (4 Punkte)

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen. Welche sind folglich invertierbar?

(a) A_ξ aus Aufgabe 24,

(b) eines beliebigen Elements aus SO(2),

(c) von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 9 \\ 3 & 7 & 10 & 3 & 17 \\ 4 & 0 & 11 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 8 & 0 & -3 \\ 5 & 1 & 6 & -1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 27: Permutationen (3 Punkte)

Eine bijektive Abbildung $\pi : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ nennt man eine Permutation, die Menge S_n aller solcher Abbildungen heißt symmetrische Gruppe oder Permutationsgruppe.

(a) Zeigen Sie, dass S_n mit der Komposition als Verknüpfung eine Gruppe bildet und bestimmen Sie die Mächtigkeit von S_n.

(b) Weiter definieren wir für jedes $\pi \in S_n$ einen Endomorphismus $L_\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch

$$L_\pi(x_1, \dots, x_n) = (x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)}).$$

Welche Werte kann $\operatorname{sgn}(\pi) := \det(L_\pi)$ annehmen? Welchen Wert hat $\operatorname{sgn}(\sigma_{ij})$, wobei

$$\sigma_{ij}(k) = \begin{cases} k & \text{falls } k \notin \{i, j\} \\ j & \text{falls } k = i \\ i & \text{falls } k = j \end{cases}$$

die Vertauschung von i und j ist.

(c) Seien $\pi_1, \pi_2 \in S_n$. Zeigen Sie, dass $\operatorname{sgn}(\pi_2 \circ \pi_1) = \operatorname{sgn}(\pi_2) \operatorname{sgn}(\pi_1)$.

Aufgabe 28: Leibnizsche Formel (2 Punkte)

Beweisen Sie die Leibnizsche Formel für die Determinante einer Matrix $A \in M(n, \mathbb{K})$, $A = (a_{ij})$,

$$\det(A) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) a_{1\pi(1)} \dots a_{n\pi(n)}.$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass die rechte Seite eine Determinantenform definiert.

Aufgabe 29: Determinanten und Zeilenstufenform (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die Determinante einer oberen oder unteren Dreiecksmatrix durch das Produkt der Diagonaleinträge gegeben ist, d.h.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

(b) Wie verändert sich der Wert einer Determinante bei elementaren Zeilen- und Spaltenumformungen?
Berechnen Sie die folgende Determinante, indem Sie sie durch Zeilen- und Spaltenumformungen auf Dreiecksgestalt bringen:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & -3 \\ 2 & -2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Aufgabe 30: Orientierung von Basen* (3 Zusatzpunkte)

Erinnerung: Sei X eine beliebige Menge und $x, y, z \in X$. Auf X sei eine Relation $\sim$ erklärt, d.h. wir haben eine Teilmenge $R \subset X \times X$ und schreiben $x \sim y$, falls gilt $(x, y) \in R$. Eine solche Relation heißt Äquivalenzrelation, falls gilt

- $x \sim x$, *(Reflexivität),*
- $x \sim y \Rightarrow y \sim x$, *(Symmetrie),*
- $x \sim y$ *und* $y \sim z \Rightarrow x \sim z$, *(Transitivität).*

Dann existieren paarweise disjunkte Teilmengen U_i, $i \in I$, so dass

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad \exists i \in I : x, y \in U_i.$$

Es gilt $\bigcup_{i \in I} U_i = X$. Die Teilmengen U_i werden Äquivalenzklassen genannt.

Betrachten Sie nun einen beliebigen Vektorraum V und die Menge $B(V)$ aller Basen von V. Zwei Elemente $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in B(V)$ mit $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$ und $\mathcal{B} = (w_1, \dots, w_n)$ heißen gleichorientiert, $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$, wenn der durch $Lv_i = w_i$ festgelegte Endomorphismus $L : V \to V$ positive Determinante hat. Zeigen Sie, dass dies eine Äquivalenzrelation auf $B(V)$ festlegt. Wieviele Äquivalenzklassen gibt es?

Abgabe: Bis spätestens 10.00 Uhr am Montag den 26.05.2014 im Briefkasten von Herrn Teufel (Gebäude C, Raum links vom Eingang in Ebene 3) oder vor Beginn der Vorlesung bis 10.15 Uhr im Hörsaal N2.