Stefan Teufel
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2014
26. Mai 2014

Mathematik für Physiker II

Übungsblatt 7

Aufgabe 31: Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmen (6 Punkte)

(a) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

(b) Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2a & b & a \\ 10 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

diagonalisierbar? Führen Sie die Diagonalisierung für die erlaubten Parameter durch.

Aufgabe 32: Die Spur (3 Punkte)

Die Spur einer $n \times n$-Matrix A ist definiert durch

$$\mathrm{Spur} A = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}.$$

Zeigen Sie, dass für $A, B \in M(n, \mathbb{K})$ gilt $\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA)$. Folgern Sie daraus, dass ähnliche Matrizen und somit alle Matrixdarstellungen eines Endomorphismus $L : V \to V$ dieselbe Spur haben, die wir dann ebenfalls mit $\mathrm{Spur} L$ bezeichnen.

Aufgabe 33: Spur und Determinante als Funktion der Eigenwerte (1 Punkt)

Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum und $A \in \mathcal{L}(V)$ diagonalisierbar mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ und geometrischen Vielfachheiten $n_1, \dots, n_r$. Drücken Sie $\mathrm{Spur}(A)$ und $\det(A)$ durch die Eigenwerte von A aus.

Aufgabe 34: Verschiedenes zu Eigenwerten (8 Punkte)

Sei $A \in M(n, \mathbb{C})$ und λ ein Eigenwert mit zugehörigem Eigenraum $E_\lambda \subset \mathbb{C}^n$ der Dimension k. Zeigen Sie:

(a) λ ist ein Eigenwert von A^T mit geometrischer Vielfachheit k.

(b) Sei A regulär, dann ist λ^{-1} Eigenwert zu A^{-1}. Geben Sie den zugehörigen Eigenraum an.

(c) $\bar{\lambda}$ ist Eigenwert von $\bar{A}$. Geben Sie auch hier den zugehörigen Eigenraum an.

(d) Sei A nilpotent, d.h. es gibt ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $A^n = 0$. Zeigen Sie, dass daraus folgt $\lambda = 0$.

Aufgabe 35: Kommutator und gemeinsame Diagonalisierbarkeit (4 Punkte)

Seien $A, B \in M(n, \mathbb{K})$ diagonalisierbar. Zeigen Sie, dass

$$AB = BA \Leftrightarrow A, B \text{ sind simultan diagonalisierbar.}$$

Dies bedeutet, es gibt ein $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$, so dass SAS^{-1} und SBS^{-1} Diagonalmatrizen sind.

Aufgabe 36: Gerschgorin-Kreise und Diagonaldominanz* (4 Zusatzpunkte)

Sei $A \in M(n, \mathbb{C})$ eine quadratische Matrix mit Einträgen a_{ij}. Zu jeder Zeile $j = 1, \ldots, n$ definiert man den zugehörigen Gerschgorin-Kreis

$$S_j = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - a_{jj}| \leq r_j\}$$

mit

$$\text{Mittelpunkt } a_{jj} \qquad \text{und} \qquad \text{Radius } r_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ji}| \, .$$

Zeigen Sie, dass die Menge $\cup_{j=1}^{n} S_j$ alle Eigenwerte von A enthält. Folgern Sie daraus, dass strikt diagonaldominante Matrizen invertierbar sind. Eine Matrix heißt strikt diagonaldominant, wenn für alle Zeilen $r_j < |a_{jj}|$ gilt. Gelten die entsprechenden Aussagen auch wenn man die Rolle von Zeilen und Spalten vertauscht?

Tipp: Wenn Sie selbst keine Idee haben, wie man das beweisen kann, dann schauen Sie in die Literatur oder das Internet. Allerdings sollten Sie dann die Argumente nicht nur abschreiben, sondern auch verstehen!

Abgabe: Bis spätestens 10.00 Uhr am Montag den 02.06.2014 im Briefkasten von Herrn Teufel (Gebäude C, Raum links vom Eingang in Ebene 3) oder vor Beginn der Vorlesung bis 10.15 Uhr im Hörsaal N2.