Stefan Teufel
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2014
2. Juni 2014

Mathematik für Physiker II

Übungsblatt 8

Aufgabe 37: Inverse Matrix als Polynom in A (2 Punkte)

Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Cayley-Hamilton, dass die Inverse A^{-1} einer regulären Matrix $A \in M(n, \mathbb{K})$ durch ein Polynom in A gegeben ist, also $A^{-1} = \sum_{j=0}^{n-1} c_j A^j$ für geeignete $c_j \in \mathbb{K}$.

Aufgabe 38: Fibonacci-Zahlen (4 Punkte)

Die Fibonacci-Zahlen sind definiert durch $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Hinweis: Es gilt

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diagonalisieren Sie A, um A^n zu berechnen.

Aufgabe 39: Parallelogrammgleichung und Polarisation (6 Punkte)

(a) Zeigen Sie: In jedem Skalarproduktraum gilt die Parallelogrammgleichung

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|u\|^2. \tag{1}$$

(b) Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum. Zeigen Sie, dass dann die Polarisationsidentität

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4} \left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 \right) \tag{2}$$

gilt.

(c) Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein unitärer Vektorraum. Zeigen Sie, dass die folgende Polarisationsidentität gilt:

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4} \left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 + \mathrm{i}\|u-\mathrm{i}v\|^2 - \mathrm{i}\|u+\mathrm{i}v\|^2 \right). \tag{3}$$

Bemerkung: Eine Norm ist genau dann durch ein Skalarprodukt gegeben, wenn die Parallelogrammgleichung gilt. Genauer: Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ in dem (1) gilt. Dann wird durch (2) bzw. (3) ein Skalarprodukt definiert. (Wer Lust hat, kann versuchen, das auch zu zeigen.)

Aufgabe 40: L^2-Skalarprodukt (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass auf dem Funktionenraum $C([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ der stetigen komplex-wertigen Funtionen auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ durch

$$\langle u, v \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} \overline{u(x)} v(x) \mathrm{d}x$$

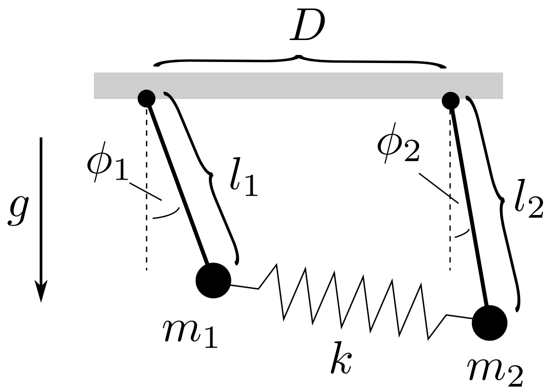
ein Skalarprodukt definiert wird. Zeigen Sie weiter, dass die Funktionen

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

ein Orthonormalsystem bilden.

Aufgabe 41: Gekoppelte Pendel (6 Zusatzpunkte)

Betrachten Sie den nebenstehenden Aufbau: Zwei Massen m_1 und m_2 im Einfluss des Schwerefeldes sind an starren masselosen Stangen der Längen l_1 und l_2 im Anstand D aufgehängt und können reibungsfrei schwingen. Sie sind durch eine ebenfalls masselose Feder der Federkonstante k verbunden. Die Ruhelänge der Feder entspricht genau dem Abstand der Massen in der Ruhelage $\phi_1 = \phi_2 = 0$.



Leiten Sie zunächst die Bewegungsgleichung für die beiden Winkel ϕ_1 und ϕ_2 her. Lösen Sie nun die Bewegungsgleichungen für den Fall $l_1 = l_2 = l$, $m_1 = m_2$ und für kleine Auslenkungen. Linearisieren Sie dazu die Bewegungsgleichungen, d.h. entwickeln Sie zunächst $\sin\phi \approx \phi$ und $\cos\phi \approx 1 - \frac{\phi^2}{2}$ und behalten Sie nur Terme linear in ϕ_1 oder ϕ_2. Dann lösen Sie die entstehende Gleichung

$$\begin{pmatrix} \ddot{\phi}_1(t) \\ \ddot{\phi}_2(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{pmatrix}$$

indem Sie die Matrix A diagonalisieren. (Sie brauchen hier nicht auf ein System erster Ordnung zu transformieren.) Was sind also die "Normalmoden" des Systems und die zugehörigen Frequenzen?

Abgabe: Bis spätestens 10.00 Uhr am Montag den 16.06.2014 im Briefkasten von Herrn Teufel (Gebäude C, Raum links vom Eingang in Ebene 3) oder vor Beginn der Vorlesung bis 10.15 Uhr im Hörsaal N2.