Stefan Teufel
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2014
16. Juni 2014

Mathematik für Physiker II

Übungsblatt 9

Aufgabe 42: Gram-Schmidt Verfahren (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass auf dem $\mathbb{R}^2$ durch $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right\rangle := 2a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + 3a_2b_2$$

ein Skalarprodukt definiert wird.

Führen Sie das Gram-Schmidt-Verfahren für die Vektoren $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ durch.

Aufgabe 43: Legendre-Polynome (3 Punkte)

Betrachten Sie den Raum $C([-1,1],\mathbb{R})$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v\rangle = \int_{-1}^{1} u(x)v(x)\mathrm{d}x.$$

Indem man auf die Folge der Monome $u_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}_0$, das Orthonormalisierungsverfahren nach Gram und Schmidt anwendet, erhält man eine Orthonormalfolge $(v_0, v_1, \ldots)$. Bestimmen Sie v_0, v_1, v_2 und v_3. Die Legendre-Polynome P_n ergeben sich, wenn man statt der Normierung $\langle v_n, v_n\rangle = 1$ fordert, dass $P_n(1) = 1$. Es ist also $P_n = \frac{v_n}{v_n(1)}$.

Aufgabe 44: Pauli-Matrizen (4 Punkte)

Die Pauli-Matrizen sind definiert durch

$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Weiter setzen wir für einen Vektor $a \in \mathbb{R}^3$, $a \cdot \sigma := a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3 \in M(2,\mathbb{C})$ und definieren den Raum $\mathfrak{su}(2) := \{A \in M(2,\mathbb{C}) \mid A = a \cdot \sigma,\ a \in \mathbb{R}^3\}$, den wir als Vektorraum über $\mathbb{R}$ auffassen.

Zeigen Sie, dass

$$(a \cdot \sigma)(b \cdot \sigma) = \langle a, b\rangle_{\mathbb{R}^3} E_2 + \mathrm{i}(a \times b) \cdot \sigma$$

gilt, wobei $a \times b$ das Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$ bezeichne und $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^3}$ das euklidische Skalarprodukt. Nun definieren wir ein Skalarprodukt auf $\mathfrak{su}(2)$ durch

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{su}(2)} : \mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(2) \to \mathbb{R}, \qquad \langle A, B\rangle_{\mathfrak{su}(2)} = \tfrac{1}{2}\mathrm{Spur}(AB).$$

Zeigen Sie, dass die lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathfrak{su}(2)$, $a \mapsto a \cdot \sigma$ ein isometrischer Isomorphismus ist.

Aufgabe 45: Exakte Sequenzen (3 Punkte)

Seien U, V, W endlichdimensionale Vektorräume und $A : U \to V$, $B : V \to W$ lineare Abbildungen. Die Sequenz

$$U \xrightarrow{A} V \xrightarrow{B} W$$

heißt exakt bei V, falls $\mathrm{Bild}(A) = \mathrm{Kern}(B)$ gilt. Eine Sequenz

$$0 \longrightarrow U \xrightarrow{A} V \xrightarrow{B} W \longrightarrow 0 \tag{1}$$

heißt kurze exakte Sequenz, falls sie bei U, V und W exakt ist. Hier steht 0 für den Vektorraum der nur aus dem Nullvektor besteht und die Pfeile ganz links und ganz rechts für die jeweils einzig möglichen linearen Abbildungen $0 \mapsto 0 \in U$ bzw. $W \ni w \mapsto 0$.

Zeigen Sie: Ist (1) eine kurze exakte Sequenz, so ist A injektiv, B surjektiv und es gilt

$$\dim V = \dim U + \dim W\,.$$

Aufgabe 46: Linksshift auf ℓ^2 (2 Punkte)

Auf dem Skalarproduktraum ℓ^2 sei der Endomorphismus $L : \ell^2 \to \ell^2$ definiert durch

$$a = (a_1, a_2, a_3, \dots) \;\mapsto\; La = (a_2, a_3, \dots)\,,$$

also $(La)_n = a_{n+1}$. Bestimmen Sie den dazu adjungierten Endomorphismus L^*.

Aufgabe 47: Dualraum und duale Basis (3 Punkte)

(a) Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$ mit Basis $\mathcal{A} = (a_1, \dots, a_n)$. Wir definieren nun n lineare Abbildungen $a_i' : V \to \mathbb{K}$ durch $a_i'(a_j) = \delta_{ij}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}' = (a_1', \dots, a_n')$ eine Basis des Dualraums V' bildet. Diese wird die duale Basis zu $\mathcal{A}$ genannt.

(b) Sei nun eine zweite Basis $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ von V gegeben, die man durch die Transformation S aus der alten Basis $\mathcal{A}$ erhält, also $b_j = Sa_j$. Wie lautet die Abbildung, die $\mathcal{A}'$ in $\mathcal{B}'$ überführt.

(c) Seien $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ zwei linear unabhängige Vektoren. Berechnen Sie die duale Basis zu (x, y).

Abgabe: Bis spätestens 10.00 Uhr am Montag den 23.06.2014 im Briefkasten von Herrn Teufel (Gebäude C, Raum links vom Eingang in Ebene 3) oder vor Beginn der Vorlesung bis 10.15 Uhr im Hörsaal N2.