Mathematik III für Physiker*

Wintersemester 2014/2015

Stefan Teufel
Mathematisches Institut
Uni Tübingen

8. Juli 2014

*Diese vorläufige Version des Skriptums ist nur zum Gebrauch parallel zum Besuch der Vorlesung gedacht. Das Studium des Skripts kann den Besuch der Vorlesung **nicht** ersetzen! Falls Sie Fehler finden, teilen Sie mir diese (auch die offensichtlichen) bitte mit!

Inhaltsverzeichnis

1 Topologische, metrische und normierte Räume

Um Konzepte wie Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Integrierbarkeit z.B. für Funktionen $f(x)$ mehrerer reeller Variable $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ zu definieren, muss man zunächst Begriffe wie Konvergenz von Folgen $x_n \to a \in \mathbb{R}$, offenes Intervall $(a, b) \in \mathbb{R}$, Vollständigkeit, etc. auf den $\mathbb{R}^n$ verallgemeinern.

Da wir schließlich aber auch über den $\mathbb{R}^n$ hinausgehen werden, machen wir das alles gleich etwas allgemeiner auf sogenannten metrischen Räumen.

1.1 Definition. <u>**Metrik**</u>
Sei X eine Menge. Eine Abbildung

$$d : X \times X \to [0, \infty)$$

heißt **Metrik auf** X, wenn für alle $x, y, z \in X$ gilt:

(i) $d(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y\,,$ (Definitheit)

(ii) $d(x, y) = d(y, x)\,,$ (Symmetrie)

(iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)\,.$ (Dreiecksungleichung)

Das Paar (X, d) heißt dann **metrischer Raum**.

1.2 Beispiele. <u>**Euklidische und diskrete Metrik**</u>

(a) Sei $X = \mathbb{R}^n$. Dann ist für $x, y \in \mathbb{R}^n$ durch $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$ eine Metrik definiert, die sog. **euklidische Metrik**. $(\mathbb{R}^n, d)$ heißt **euklidischer Raum**.
Die Eigenschaften (i) und (ii) aus Definition 1.1 sind offensichtlich, die Dreiecksungleichung nicht (vgl. Kapitel 6 aus MaPhy2). Falls nicht anders gesagt, sei der $\mathbb{R}^n$ im Folgenden immer mit der euklidischen Metrik versehen.

(b) Sei X eine beliebige Menge und

$$d(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist d eine Metrik auf X und heißt **diskrete Metrik.**

1.3 Bemerkung. Jede Teilmenge $Y \subset X$ eines metrischen Raums (X, d) ist, mit derselben Metrik versehen, selbst wieder ein metrischer Raum (Y, d).

1.4 Definition. <u>**Norm**</u>
Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Eine Abbildung

$$\| \cdot \| : V \to [0, \infty)$$

heißt eine **Norm** auf V, wenn für alle $x, y \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:

(i) $\|x\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0\,,$ (Definitheit)

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$, (Homogenität)
(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. (Dreiecksungleichung)
Das Paar $(V, \|\cdot\|)$ heißt **normierter Raum**.

1.5 Bemerkung. Jede Norm induziert eine Metrik
Auf einem normierten Raum $(V, \|\cdot\|)$ wird durch

$$d : V \times V \to [0, \infty)\,, \quad d(x, y) := \|x - y\|\,,$$

eine Metrik auf V definiert.

Beweis. (i) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$,
(ii) $d(x, y) = \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |(-1)|\,\|y - x\| = \|y - x\| = d(y, x)$,
(iii) $d(x, z) = \|x - z\| = \|x - y + y - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z)$.

□

1.6 Beispiele. (a) **Die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$:**
Sei $V = \mathbb{R}^n$. Dann ist für $x \in \mathbb{R}^n$ durch

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

eine Norm definiert, die euklidische Norm. Die von ihr nach Bemerkung 1.5 induzierte Metrik ist die euklidische Metrik.

(b) Die **Maximumsnorm** auf $\mathbb{R}^n$ ist

$$\|x\|_\infty := \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}\,.$$

Im allgemeinen ist für $x \in \mathbb{R}^n$ natürlich $\|x\|_2 \neq \|x\|_\infty$. Beispielsweise für $x = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$ ist $\|x\|_2 = \sqrt{2}$ aber $\|x\|_\infty = 1$. (In den Übungen sollen Sie die “Einheitskugeln” des $\mathbb{R}^2$ bezüglich verschiedener Normen skizzieren.)

(c) Sei X eine beliebige Menge und V der Vektorraum der beschränkten reell-wertigen Funktionen auf X,

$$V = \{f : X \to \mathbb{R} \mid \sup_{x \in X} |f(x)| < \infty\}\,.$$

Dann ist

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)|$$

eine Norm auf V.

Beweis. (i) $\|f\|_\infty = 0 \;\Leftrightarrow\; f(x) = 0\;\forall\, x \in X \;\Leftrightarrow\; f = 0$.
(ii) $\|\lambda f\|_\infty = \sup_{x \in X} |\lambda||f(x)| = |\lambda| \sup_{x \in X} |f(x)| = |\lambda|\,\|f\|_\infty$.
(iii) $\|f + g\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x) + g(x)| \leq \sup_{x \in X} (|f(x)| + |g(x)|) \leq \sup_{x \in X} |f(x)| + \sup_{x \in X} |g(x)| = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

□

(d) In (c) kann man $\mathbb{R}$ durch einen beliebigen normierten Raum $(Y, \|\cdot\|)$ ersetzen und erhält, dass auf

$$V = \{f : X \to Y \mid \sup_{x \in X} \|f(x)\| < \infty\}\,.$$

durch
$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in X} \|f(x)\|$$
eine Norm definiert wird.

1.7 Merke. **Zusammenhang zwischen Metrik und Norm**

$$\begin{aligned} \text{Metrik} &\ \widehat{=}\ \text{Abstand zwischen Punkten beliebiger Mengen} \\ \text{Norm} &\ \widehat{=}\ \text{Länge eines Vektors} \end{aligned}$$

Jede Norm induziert auch eine Metrik, da "Abstand" gleich "Länge des Differenzvektors" gesetzt werden kann.

Auf einem Vektorraum gilt also
$$\begin{array}{ccccc} \text{Skalarprodukt} & & \text{Norm} & & \text{Metrik} \\ \langle\cdot,\cdot\rangle & \mapsto & \|\cdot\| = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle} & \mapsto & d(x,y) = \|x-y\| \end{array}$$

1.8 Definition. **Offene Mengen in metrischen Räumen**

Sei (X, d) ein metrischer Raum.

(a) Für $x_0 \in X$ und $r > 0$ heißt
$$B_r(x_0) := \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}$$
die **offene Kugel** (Ball) um x_0 vom Radius r.

(b) Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt **Umgebung** des Punktes $x_0 \in X$, falls U auch eine offene Kugel um x_0 enthält, also falls ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass
$$B_\varepsilon(x_0) \subset U\,.$$
Falls U Umgebung von x_0 ist, so heißt x_0 **innerer Punkt** von U.
Insbesondere ist also für $r > 0$ die offene Kugel $B_r(x_0)$ selbst eine Umgebung von x_0.

(c) Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt **offen**, wenn sie Umgebung jedes ihrer Punkte ist, d.h. wenn zu jedem $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $B_\varepsilon(x) \subset U$.
Eine Menge ist also offen, wenn sie nur innere Punkte enthält.

1.9 Beispiele. (a) Die offene Kugel $B_r(x_0)$ ist offen: Sei $x \in B_r(x_0)$ beliebig, dann gilt nach Definition $d(x, x_0) < r$. Man setzt also $\varepsilon := r - d(x, x_0) > 0$ und hat dann wegen der Dreiecksungleichung $B_\varepsilon(x) \subset B_r(x_0)$:
$$y \in B_\varepsilon(x) \quad\Rightarrow\quad d(y, x_0) \le d(y, x) + d(x, x_0) < \varepsilon + d(x, x_0) = r\,.$$

(b) Ein offenes Intervall $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ist eine offene Menge bzgl. der euklidischen Metrik $d(x, y) = |x - y|$.

(c) Sei X beliebig und versehen mit der diskreten Metrik (Beispiel 1.2), dann ist jede Teilmenge $U \subset X$ offen. (Klar: $B_{\frac{1}{2}}(x) = \{x\}\ \forall x \in X$.)

1.10 Bemerkung. In einem metrischen Raum X gilt:

(a) $\emptyset$ und X sind offen.

(b) Sind $U, V \subset X$ offen, so ist auch $U \cap V$ offen.

(b) Sind $U_i \subset X$ offen ($i \in \mathcal{I}$, $\mathcal{I}$ eine beliebige Indexmenge), so ist auch $\bigcup\limits_{i\in\mathcal{I}} U_i$ offen.

Beweis. (a) Offenbar.

(b) Sei $x \in U \cap V$. Dann gibt es $r, s > 0$ mit $B_r(x) \subset U$ und $B_s(x) \subset V$, da U und V ja offen sind. Setze $\varepsilon := \min(r, s) > 0$, dann gilt $B_\varepsilon(x) \subset U \cap V$, also ist auch $U \cap V$ offen.

(c) Sei $x \in \bigcup U_i$. Dann gibt es ein $i_0 \in \mathcal{I}$ mit $x \in U_{i_0}$. Nun ist U_{i_0} offen, also existiert $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subset U_{i_0} \subset \bigcup_i U_i$.

□

1.11 Bemerkung. Beliebige Durchschnitte offener Mengen sind im Allgemeinen nicht mehr offen, z.B. ist $I_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \subset \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ offen, aber $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{0\}$ sicher nicht.

1.12 Definition. **Abgeschlossene Mengen**

Sei X ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt **abgeschlossen**, wenn ihr Komplement $A^{\mathrm{c}} := X \setminus A$ offen ist.

1.13 Beispiele. (a) $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ist abgeschlossen.

(b) $[a, \infty) \subset \mathbb{R}$ ist abgeschlossen.

(c) $[a, b) \subset \mathbb{R}$ ist für $-\infty < a < b < \infty$ weder abgeschlossen noch offen.

(d) Sei (X, d) metrischer Raum. Dann sind $\emptyset$ und X sowohl offen als auch abgeschlossen.

1.14 Merke. Im Allgemeinen ist eine Teilmenge eines metrischen Raumes weder abgeschlossen noch offen, manchmal aber auch beides.

1.15 Bemerkung. In einem metrischen Raum X gilt:

(a) $\emptyset$ und X sind abgeschlossen.

(b) Sind $U, V \subset X$ abgeschlossen, so ist auch $U \cup V$ abgeschlossen.

(c) Beliebige Schnitte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.

Beweis. Komplementbildung in Bemerkung 1.10. □

Man kann nun die folgenden Betrachtungen noch verallgemeinern, indem man vergisst, dass die offenen Mengen mit Hilfe einer Metrik definiert wurden und stattdessen die Eigenschaften in Bemerkung 1.10 zur Definition erhebt.

1.16 Definition. **Topologische Räume**

Eine Menge X mit einem Teilmengensystem $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ (also einer Menge $\mathcal{T}$ von Teilmengen von X, wobei $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge, also die Menge aller Teilmengen bezeichnet) heißt **topologischer Raum** und $\mathcal{T}$ eine **Topologie**, falls

(a) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

(b) $U, V \in \mathcal{T} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}$

(c) $U_i \in \mathcal{T}$ für $i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$

Die Mengen $U \in \mathcal{T}$ heißen dann die **offenen Mengen**. Komplemente offener Mengen heißen wieder **abgeschlossen**.

Die Definition von innerer Punkt bzw. Umgebung lautet dann: x_0 ist **innerer Punkt** einer Menge A bzw. A ist **Umgebung** von x_0, falls es eine offene Menge O gibt mit $x_0 \in O$ und $O \subset A$.

Zusammenfassend sollten Sie sich merken, dass man in einem topologischen Raum weiß, was die offenen Mengen, was Umgebungen und was innere Punkte sind. Ausgehend davon folgen, wie wir sehen werden, Begriffe wie Konvergenz, Stetigkeit, Kompaktheit, etc.

1.17 Bemerkung. Topologische Räume in denen die Topologie nicht durch eine Metrik gegeben ist werden im folgenden keine große Rolle spielen. Trotzdem ist es nützlich und in vielen Fällen auch einfacher, den Begriff der Metrik möglichst selten zu verwenden und stattdessen mit Umgebungen und offenen Mengen zu argumentieren. In dieser Vorlesung können Sie aber stets Ihre Intuition über die offenen Mengen im $\mathbb{R}^n$ bezüglich der euklidischen Metrik verwenden.

1.18 Definition. Inneres, Abschluss, Rand

Sei X ein topologischer Raum und $Y \subset X$ eine Teilmenge. Es heißen

(a) $\mathring{Y} := \bigcup\limits_{\substack{U \subset Y \\ U \text{ offen}}} U$ das **Innere** oder der **offene Kern** von Y,

(b) $\overline{Y} := \bigcap\limits_{\substack{A \supset Y \\ A \text{ abgeschlossen}}} A$ der **Abschluss** oder die **abgeschlossene Hülle** von Y,

(c) $\partial Y = \overline{Y} \setminus \mathring{Y}$ der **Rand** von Y.

Es gilt also jeweils per Definition

- $\mathring{Y} \subset Y \subset \overline{Y}$
- $\mathring{Y}$ ist die größte in Y enthaltene offene Menge, insbesondere ist $\mathring{Y}$ offen.
- Y ist offen $\Leftrightarrow Y = \mathring{Y}$
- $\overline{Y}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge in der Y enthalten ist, insbesondere ist $\overline{Y}$ abgeschlossen.
- Y ist abgeschlossen $\Leftrightarrow Y = \overline{Y}$
- $\mathring{Y}$ ist das Komplement von $\overline{X \setminus Y}$
- $\overline{Y}$ ist das Komplement von $(X \setminus Y)^\circ$

1.19 Bemerkung. Alternative Charakterisierungen

In einem topologischen Raum X gilt:

(a) $\mathring{Y}$ ist die Menge der inneren Punkte von Y.

(b) Ein Punkt $x \in X$ ist genau dann Randpunkt von $Y \subset X$, wenn jede Umgebung von x sowohl einen Punkt aus Y als auch einen Punkt aus $X \setminus Y$ enthält.

(c) $\mathring{Y} = Y \setminus \partial Y$

(d) $\overline{Y} = Y \cup \partial Y$

Beweis. Übungsaufgabe □

1.20 Beispiele. (a) Sei $Y = (a, b] \subset \mathbb{R}$. Dann ist $\mathring{Y} = (a, b)$, $\overline{Y} = [a, b]$ und $\partial Y = \{a, b\}$.

(b) Betrachte $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$: Da in jedem ε-Ball $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ sowohl eine rationale als auch eine irrationale Zahl liegt, ist $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$. Somit sind $\mathring{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \setminus \partial\mathbb{Q} = \emptyset$ und $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$.

1.21 Definition. Konvergenz von Folgen

Sei X ein topologischer Raum. Eine Folge (x_n) in X heißt **konvergent gegen** $a \in X$, geschrieben

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

oder kurz $x_n \to a$ für $n \to \infty$, wenn gilt:
Für jede Umgebung $U \subset X$ von a gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $x_n \in U$ für alle $n \geq N$. Eine Folge konvergiert also gegen einen Punkt, wenn jede (noch so kleine) Umgebung des Punktes alle bis auf endlich viele Folgenglieder enthält.

1.22 Bemerkung. **Konvergenz in metrischen Räumen**

Eine Folge (x_n) in einem metrischen Raum X konvergiert genau dann gegen $a \in X$, wenn $d(x_n, a)$ als Folge in $\mathbb{R}$ gegen Null konvergiert, also

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N : d(x_n, a) < \varepsilon \, .$$

Beweis. Übungsaufgabe. □

1.23 Definition. **Häufungspunkt**

Sei X ein topologischer Raum und (x_n) eine Folge in X. Ein Punkt $a \in X$ heißt **Häufungspunkt** von (x_n), falls jede Umgebung U von a unendlich viele Folgenglieder enthält.

1.24 Satz. **Folgenkriterium für den Abschluss in metrischen Räumen**

Sei X ein metrischer Raum und $A \subset X$. Dann liegt ein Punkt $a \in X$ genau dann im Abschluss $\bar{A}$ der Menge A, wenn es eine Folge (x_n) in A gibt, die gegen a konvergiert, also

$$a \in \bar{A} \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists (x_n) \in A \, : \, \lim_{n\to\infty} x_n = a \, .$$

Eine Teilmenge $A \subset X$ ist also genau dann abgeschlossen, wenn für jede konvergente Folge (x_n) in A gilt, dass auch der Grenzwert $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ in A liegt.

Beweis. „ $\Rightarrow$ “: Sei $a \in \bar{A}$. Nach Bemerkung 1.19 (b) gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$, dass $B_{\frac{1}{n}}(a) \cap A \neq \emptyset$. Wir können also für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(a) \cap A$ auswählen. Diese Folge liegt ganz in A und konvergiert gegen a.

„ $\Leftarrow$ “: Diese Richtung gilt auch in topologischen Räumen. Sei (x_n) eine Folge in A mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Angenommen, $a \notin \bar{A}$, also $a \in X \setminus \bar{A}$. Dann wäre aber die offene Menge $X \setminus \bar{A}$ Umgebung von a und müßte alle bis auf endlich viele Folgenglieder x_n enthalten. Das ist aber ein Widerspruch zur Annahme, dass $x_n \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}$. □

1.25 Definition. **Cauchyfolge**

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge (x_n) in X heißt **Cauchyfolge**, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n, m \geq N$ gilt

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon \, .$$

1.26 Bemerkung. Jede konvergente Folge ist auch eine Cauchy-Folge: Sei $\lim x_n = a$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq N$. Wegen der Dreiecksungleichung ist dann für $n, m \geq N$ aber $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, a) + d(x_m, a) < \varepsilon$. Die Umkehrung gilt nur in vollständigen Räumen.

1.27 Definition. **Vollständigkeit und Banachraum**

(a) Ein metrischer Raum (X, d) heißt **vollständig**, wenn in ihm jede Cauchyfolge konvergiert.

(b) Ein vollständiger normierter Raum $(V, \| \cdot \|)$ heißt **Banachraum**.

1.28 Bemerkung. Konvergenz, Kompaktheit, Stetigkeit, Abschluss, Rand etc. sind topologische Begriffe. Die Konzepte Cauchyfolge und Vollständigkeit benötigen mehr Struktur, z.B. eine Metrik.

Wir haben gesehen, dass jede Norm eine Metrik und jede Metrik eine Topologie (also eine Definition von offenen Mengen) liefert. Konvergenz von Folgen hängt allerdings nur von der Topologie ab. Deshalb ist es nützlich zu verstehen, wann verschiedene Normen den gleichen Konvergenzbegriff und auch den gleichen Vollständigkeitsbegriff liefern.

1.29 Definition. Äquivalenz von Normen

Zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ auf einem Vektorraum V heißen **äquivalent**, wenn es Konstanten $c, C > 0$ gibt, so dass für alle $x \in V$ gilt:

$$c\,\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\,\|x\|_1\,.$$

(Umgekehrt gilt dann offensichtlich auch

$$\frac{1}{C}\,\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \frac{1}{c}\,\|x\|_2\,. \quad)$$

1.30 Bemerkung. Seien $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ äquivalente Normen auf V. Dann gilt:

(a) $\lim x_n = a$ in $(V, \|\cdot\|_1) \quad \Leftrightarrow \quad \lim x_n = a$ in $(V, \|\cdot\|_2)$.

(b) (x_n) ist Cauchy in $(V, \|\cdot\|_1) \quad \Leftrightarrow \quad (x_n)$ ist Cauchy in $(V, \|\cdot\|_2)$.

(c) $(V, \|\cdot\|_1)$ ist vollständig $\quad \Leftrightarrow \quad (V, \|\cdot\|_2)$ ist vollständig.

Beweis. (a) Sei $\lim x_n = a$ in $(V, \|\cdot\|_1)$, also $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - a\|_1 = 0$. Dann ist auch $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - a\|_2 \leq \lim\limits_{n\to\infty} C\|x_n - a\|_1 = 0$. (b) Analog. (c) folgt aus (a) und (b). $\square$