Mathematik für Physiker IV

Übungsblatt 2

Aufgabe 4: (×)

Beweise: Falls $f : \Omega \to U$ und $g : U \to \mathbb{C}$ holomorph sind, so gilt die Kettenregel:

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z) \qquad \text{für alle } z \in \Omega.$$

Aufgabe 5: (×)

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $1/R = \limsup |a_n|^{1/n}$. Zeige, dass für $|z| > R$ die Reihe divergiert.

Aufgabe 6: $(\times, *, 3P)$

Sei $C = \{z \in \mathbb{C} \big| |z| = 1\}$. Zeige:

a) Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} nz^n$ konvergiert auf keinem Punkt $z \in C$.
Hinweis: Verwende die Ableitung einer geometrischen Reihe.

b) Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ konvergiert auf ganz C.

c) Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ konvergiert auf $C \setminus \{1\}$.
Hinweis: Zeige und verwende die *partielle Summation*: Seien $a, b \in \mathbb{C}^N$ und $B_k = \sum_{n=1}^{N} b_n$. Dann gilt

$$\sum_{n=M}^{N} a_n b_n = a_N B_N - a_M B_{M-1} - \sum_{n=M}^{N-1} (a_{n+1} - a_n) B_n.$$

Aufgabe 7: (×)

Zeige, dass

$$4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = 4\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\frac{\partial}{\partial z} = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Verwende dies um zu zeigen, dass $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ harmonisch sind ($\Delta u = \Delta v = 0$), falls die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ holomorph ist.