Mathematik für Physiker IV

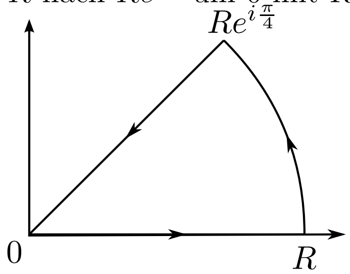
Übungsblatt 3

Aufgabe 8: (×)

Beweise, dass

$$\int_0^\infty \sin(x^2)dx = \int_0^\infty \cos(x^2)dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

Hinweis: Integriere die Funktion e^{-z^2} über den Weg der sich aus $[0,R] \subset \mathbb{R}$, dem Kreisbogen von R nach $Re^{i\frac{\pi}{4}}$ um 0 mit Radius R und der Strecke von $Re^{i\frac{\pi}{4}}$ nach 0 zusammensetzt.



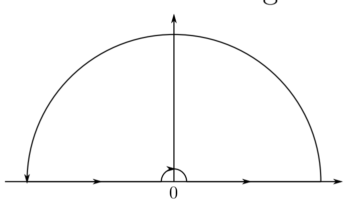
Benutze $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

Aufgabe 9: (×)

Zeige, dass

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}dx = \frac{\pi}{2}.$$

Hinweis: Das Integral lässt sich schreiben als $\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix}-1}{x}dx$. Benutze den folgenden Weg:



Aufgabe 10: (×)

Es sei Ω ein offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ und $T \subset \Omega$ ein Dreieck, dessen Inneres ebenfalls in Ω liegt. Nehme an, dass die Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph auf $\Omega \setminus \{w\}$ ist und lokal beschränkt um w, wobei $w \in T$. Zeige nun, dass

$$\int_T f(z)dz = 0.$$

Aufgabe 11: $(\times, *, 3P)$

Sei T der Rand eines Dreiecks in $\mathbb{R}^2$ und $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar mit $\mathrm{rot}F = 0$ (für $F = (F_1, F_2)$ heisst das $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0$). Zeige, dass der Beweis von Goursat's Theorem reproduzierbar ist um

$$\int_T F \cdot \mathrm{d}r = 0$$

zu zeigen.