Mathematik für Physiker IV

Übungsblatt 4

Aufgabe 12: (×)

Berechne mit Hilfe der Cauchy Integralformel folgende Integrale

$$\int_{|z+1|=1} \frac{\mathrm{d}z}{(z^2-1)(z-1)^2}, \qquad \int_{|z|=2} \frac{\sin z}{z+\mathrm{i}}\mathrm{d}z, \qquad \int_{|z+2\mathrm{i}|=3} \frac{\exp(z)}{z^2+\pi^2}\mathrm{d}z.$$

Aufgabe 13: (×)

Berechne folgende Integrale

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\cos(bx)dx, \qquad \int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\sin(bx)dx, \qquad a>0.$$

Hinweis: Integriere die Funktion e^{-Az}, $A=\sqrt{a^2+b^2}$, über einen geigneten Kreissektor mit Winkel ω, wobei ω durch $\cos(\omega)=a/A$ gegeben ist.

Aufgabe 14: (×)

Es Sei $f:\mathbb{D}\to\mathbb{C}$ holomorph auf der offenen Einheitskreisscheibe

$$\mathbb{D}=\left\{z\in\mathbb{C}\middle||z|<1\right\}.$$

Zeige, dass der Durchmesser $d=\sup_{z,\omega\in\mathbb{D}}|f(z)-f(\omega)|$ vom Bild von $f(\mathbb{D})$ der Beziehung

$$2|f'(0)|\leq d$$

genügt. Desweiteren zeige, dass Gleichheit gilt, falls f linear, $f(z)=a_0+a_1z$.
Hinweis: Benutze die Identität $2f'(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}\frac{f(\zeta)-f(-\zeta)}{\zeta^2}d\zeta$, $0<r<1$.

Aufgabe 15: $(\times, *, 3P)$

Es sei f eine analytische Funktion, definiert auf ganz $\mathbb{C}$, sodass für jedes $z_0\in\mathbb{C}$ mindestens ein Koeffizient in der Entwicklung

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\left(z-z_0\right)^n$$

gleich 0 ist. Zeige, dass f ein Polynom ist.
Hinweis: Benutze $c_n n! = f^{(n)}(z_0)$ und ein Abzählbarkeitsargument.

Aufgabe 16: $(\times, *, 3P)$

Es sei $n\in\mathbb{N}$ und $r,c>0$. Sei $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ eine ganze Funktion, für die gelte

$$|f(z)|\leq c|z|^n$$

für alle $z\in\mathbb{C}$ mit $|z|\geq r$. Zeige, dass f ein Polynom vom Grad $m\leq n$ ist.