

MATHEMATIK FÜR PHYSIKER IV  
Übungsblatt 6

**Aufgabe 17:** (×)

Berechne die folgenden Integrale mit dem Residuenkalkül:

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2 + 4)^2} dx, \quad \int_0^{2\pi} \frac{2 + 4 \cos t}{5 + 4 \sin t} dt.$$

**Aufgabe 18:** (×)

Zeige, dass

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(1 + x^2)^{n+1}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \pi.$$

**Aufgabe 19:** (×, \*, 3P)

Sei  $u \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ . Beweise

$$\sum_{n=-\infty}^\infty \frac{1}{(u + n)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi u)}.$$

**Hinweis:** Integriere

$$f(z) = \frac{\pi \cot(\pi z)}{(u + z)^2}$$

über den Kreis  $|z| = R_N = N + \frac{1}{2}$ ,  $N \in \mathbb{Z}$ ,  $N \geq |u|$ . Addiere dann die Residuen von  $f$  im Inneren des Kreises und bilde den Limes  $N \rightarrow \infty$ .

**Aufgabe 20:** (×)

Sei  $f(z)$  holomorph auf  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\} \setminus \{z_0\}$  und nehme an, dass

$$|f(z)| \leq A|z - z_0|^{-1+\varepsilon}$$

auf einer Umgebung von  $z_0$ , für ein  $\varepsilon > 0$ . Zeige, dass die Singularität von  $f$  bei  $z_0$  hebbar ist.