Mathematik für Physiker IV

Übungsblatt 7

Aufgabe 25: $(\times, *, 3P)$

Sei $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig und subharmonisch, d.h. es gilt für alle $r > 0$ und $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ die Ungleichung

$$u(\boldsymbol{x}) \leq \frac{1}{|B_r(\boldsymbol{x})|} \int_{B_r(\boldsymbol{x})} u(\boldsymbol{\xi}) \mathrm{d}^n \boldsymbol{\xi},$$

dabei bezeichnet $B_r(\boldsymbol{x}) = \left\{ \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n \middle| \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}\| \leq r \right\}$ den Ball mit Radius r und $|B_r(\boldsymbol{x})|$ sein Volumen. Zeige, dass die Funktion u auf jeder kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ ihr Maximum am Rand ∂K annimmt.

Aufgabe 26: $(\times)$

Beweise, dass

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + b\cos(\theta)} d\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}},$$

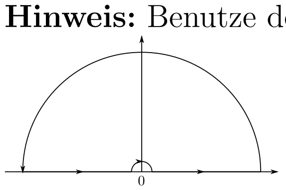
für $a > |b|$ und $a, b \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 27: $(\times)$

Zeige, dass für $a > 0$ gilt

$$\int_0^{\infty} \frac{\log(x)}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{2a} \log(a).$$

Hinweis: Benutze den folgenden Weg:



Aufgabe 28: $(\times)$

Seien f und g holomorph auf einem Gebiet, welches die Scheibe $|z| \leq 1$ enthält. Nehme an, dass f einen einfache Nullstelle bei $z = 0$ hat und sonst nirgends auf $|z| \leq 1$ verschwindet. Setze

$$f_\varepsilon(z) = f(z) + \varepsilon g(z).$$

Zeige, dass für genügend kleine ε gilt, dass

a) $f_\varepsilon(z)$ eine eindeutige Nullstelle auf $|z| \leq 1$ hat und

b) falls z_ε diese Nullstelle ist, die Abbildung $\varepsilon \mapsto z_\varepsilon$ stetig ist.

Aufgabe 29: $(\times)$

Berechne das Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1 + x^3} \mathrm{d}x.$$

Hinweis: Integriere $\int_0^\infty \frac{\ln(z)}{1+z^3}\mathrm{d}z$ über folgenden Weg: