Mathematik für Physiker IV

Übungsblatt 8

Aufgabe 30: Möbiustransformationen $(\times)$

Sei $SL_2(\mathbb{R}) = \{M \in \mathbb{R}^{2\times 2} | \det(M) = 1\}$ die spezielle lineare Gruppe. Die zu $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{R})$ gehörige *Möbiustransformation* ist definiert durch

$$f_M(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Im folgenden bezeichnet $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} | \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$ die obere Halbebene und $\mathbb{D} = \big\{z \in \mathbb{C} \big| |z| \leq 1\big\}$ die Einheitsscheibe.

a) Zeige, dass $f_M(\mathbb{H}) \subseteq \mathbb{H}$.

b) Zeige, dass $f_M \circ f_N = f_{MN}$.

c) Sei $M_\theta = \left(\begin{smallmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{smallmatrix}\right)$ und $F : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$, $F(z) = \frac{i-z}{i+z}$. Zeige, dass dann $F \circ f_{M_\theta} \circ F^{-1}$ eine Rotation auf $\mathbb{D}$ ist.

Aufgabe 31: $(\times)$

Zeige, dass für $|a| < 1$ gilt

$$\int_0^{2\pi} \log(|1 - ae^{i\theta}|) d\theta = 0.$$

Beweise dann, dass die gleiche Aussage auch für $|a| \leq 1$ gilt.

Aufgabe 32: $(\times)$

Zeige, dass die Abbildung

$$f(z) = \frac{1+z}{1-z}$$

eine konforme Abbildung von der oberen Halbscheibe auf den 1. Quadranten ist.

Aufgabe 33: $(\times)$

Sei $f(z) = (z+1)^n + (z-1)^{-m}$ mit $n, m > 0$. Berechne

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$